◎漢文訓読と順列行列のお話　　　　　　　　　　2012年年賀パズル景品　120214版　　　島野達雄

０．はじめに

皆さんは中国の詩人・杜甫（とほ）の「春望」という詩をご存じでしょうか.

　　国破山河在　城春草木深
　　感時花濺涙　恨別鳥驚心
　　烽火連三月　家書抵萬金
　　白頭掻更短　渾欲不勝簪

この詩をいま，中国語で読まれた方はおられますか？　中国語で読むと，各行の最後にある，深・心・金・簪が韻（いん）を踏んでいるのはもちろん，いわゆる平仄（ひょうそく）が心地よいメロディとリズムをかなでます.

とはいえ，日本語で読む「春望」にも美しいメロディやリズムがあります.

まず「春望」にレ点と一二点を付けてみると，次のようになります.

　　国破山河在　　城春草木深
　　感レ時花濺レ涙　恨レ別鳥驚レ心
　　烽火連二三月一　家書抵二萬金一
　　白頭掻更短　　渾欲レ不レ勝レ簪

この返り点を付けた「春望」を読みくだすと，次のような日本語（古語）になります.

　　国破れて山河在（あ）り　城春にして草木深し
　　時に感じては花にも涙を濺（そそ）ぎ　別れを恨みては鳥にも心を驚かす
　　烽火（ほうか）三月に連なり　家書（かしょ）萬金に抵（あたい）す
　　白頭掻（か）けば更に短く　渾（すべ）て簪（しん）に勝（た）えざらんと欲（ほっ）す

二行目を「…花『も』涙を濺（そそ）ぎ，…鳥『も』心を驚かす」と読み，花と鳥を主語と見なす読み方もあります．どちらにせよ，カッコ内に書いた読み方や送りがなを取り除くと，下のようになります．レ点や一二点が読み下す漢字の順番を指示していることがおわかりいただけるでしょう.

　　国破山河在　城春草木深
　　時感花涙濺　別恨鳥心驚
　　烽火三月連　家書萬金抵
　　白頭掻更短　渾簪勝不欲

さて，ここでかなり唐突な話になりますが，このような中国語から日本語への「漢字の語順の変換」は，「5次の順列行列」を使ってあらわすことができます.

「行列の積」をご存じであれば，下の 8 つの「式」が成り立っていることがおわかりいただけると思います.

$$（国破山河在）\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}＝（国破山河在）$$

$$（城春草木深）\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}=（城春草木深）$$

$$（感時花濺涙）\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}=（時感花涙濺）$$

$$（恨別鳥驚心）\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}=（別恨鳥心驚）$$

$$（烽火連三月）\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}=（烽火三月連）$$

$$（家書抵萬金）\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}=（家書萬金抵）$$

$$（白頭掻更短）\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}=（白頭掻更短）$$

$$（渾欲不勝簪）\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}=（渾簪勝不欲）$$

式は 8 つありますが，実際の語順変換，つまり返り点の付け方のパターンは次の 4 つしかありません．
国破山河在→国破山河在，城春草木深→城春草木深，白頭掻更短→白頭掻更短，の（語順が変わらない）

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

感時花濺涙→感ㇾ時花濺ㇾ涙＝時感花涙濺，恨別鳥驚心→恨ㇾ別鳥驚ㇾ心＝別恨鳥心驚，の

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

烽火連三月→烽火連二三月一＝烽火三月連，家書抵萬金→家書抵二萬金一＝家書萬金抵，の

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

渾欲不勝簪→渾欲レ不レ勝レ簪＝渾簪勝不欲，の

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これから，このような「漢文訓読の語順変換をあらわす順列行列（返読行列とよびます）」がもつ「性質」を述べたいと思います.

「１．漢文訓読を数学にする」では，2006 年の夏に初めて思いついた漢文訓読を数学的に扱う工夫を，いくつかの学会での発表の様子などもまじえて，年代をおって紹介しています.

「２．不思議な順列行列の世界」は，おもに 2011 年秋（今からほんの 3 か月ほど前）に考えた順列行列についての数学を思いつくまま気のむくまま述べています．くわしい証明をつけたところもあれば，テキトーに証明を省いたところもあります．若くして世を去った天才数学者のガロアやアーベルが切りひらいた「群論（ぐんろん）」の世界にほんの片足のつま先だけ踏みこんでいます.

読むために必要な予備知識はほとんどありません．しいて言えば，現代の高校 1 年生程度の数学です．というのも，書いている当人の老朽化が進んでおり，精神も肉体も，いまでは高校生や中学生に負けそうな能力しかないと自覚しているからです．この原稿を書いた目的は，いわば認知症の予防です.

それで，とくに「２．不思議な順列行列の世界」に書いている，数学的なことがらは間違っているかもしれませんので，間違いを発見されたら，ぜひお知らせください.

念のため，一般的によく知られている（と思われる）定理は のように点線で囲っておきました．老朽化したアタマを使ってなんとか思いついた定理は のように二重線で囲んでいます．思いつくことは思いついたけど，うまく証明できない，予想と言ってもよい定理は のように太線で囲んでおきました．この太線の予想の解決は，ちょっとした暇つぶしにはなると思いますので，考えてみてください.

これで，「０．はじめに」はおしまいです.

１．漢文訓読を数学にする

●漢文とわたし

死んだ親父が師範学校出の国語の教師だったので，家には白文の『十八史略』などがありました．最初の 2，3 ページだけエンピツで返り点や送り仮名が書き込まれていました．親父が文検の漢文に合格したときの受験参考書です．『論語集注』『論語集解』や簡野道明の『漢和大字典』などのほか，山田孝雄の『日本文法論』，それに『西鶴全集』などもあったようにおぼえています．親父の書棚の最下段には，新潮社の『日本文学大辞典』と大槻文彦の『大言海』．私の兄弟のなかでは私だけが子供のころにこういった本や辞典を読むともなしに開いていたように思います．結局，親父が 80 いくつで死ぬ頃には，私が親父の蔵書の主なものを引き取りました．この親父は，今にして思えば受験マニアで，戦後中学校の校長で退職したあと，私立の高校に奉職しましたが，そのときに佛教大学の通信講座で高校の書道教師の資格をとったりしていました．

満 101 歳で健在の母親も女子師範卒です．40 歳で私を産んだときに小学校教師を退職したそうです．戦前からの小学校教師だったので，南朝の忠臣，児島高徳（たかのり）をうたった小学唱歌を中学生だったわたしに教えてくれたことがあります．「桜の幹に十字の詩，天勾践（こうせん）を空（むな）しうする莫（なか）れ，時に范蠡（はんれい）無きにしも非ず」．他の歌詞を教わったかどうかは，もう忘れました．「天勾践を空しうする莫れ，時に范蠡無きにしも非ず」の部分は詩吟でやります．川中島の「鞭声粛々夜河を渡る」や乃木将軍の「金州（錦州とも）城外斜陽に立つ」など，戦前の人なら誰もが知っている，漢詩（詩吟）も母に教わりました．母が何かの事件の犯人が逮捕された新聞記事を見て，「天網（てんもう）恢恢（かいかい）疎にして漏らさず」と言ったので，どういう意味かたずねたこともあります．

というわけで，どちらかと言えば，漢文は私の身近なところにありました．中学生のころ，故事成語を集めた読み物のなかから，「大隠（たいいん）は朝市に隠（かく）る（ほんとうの悟りに達した隠者は人の多い町なかに隠れ住む）」という「文選（もんぜん）」の一句を発見し，これこそ我が人生の座右の銘である，と思ったりもしました．三つ子の魂百まで，おかげで還暦を越えた今でも「大隠は朝市に隠る」と思いこんでいます．むろん，ごまめの歯ぎしりです．

ひるがえって，団塊の世代には案外，私のような体験をした人が多いのではないかと思います．つまり，第一次ベビーブーム世代は，両親が受けた戦前の教育を何らかのかたちで受けついでいるのではないでしょうか．大学に入ると，親の職業が「教師」という同級生がたくさんいました．

●近畿和算ゼミナールに参加する

私が初めて近畿和算ゼミナールの例会に参加したのは, 94 年 1 月に村田全先生が講演をされたときです．会場は千里中央の大きなビルの一室でした．このときは数十名の聴講者がいたように思います．和算ゼミの創始者の一人である宮本良雄先生の娘婿である，大阪府立高専（現在は大阪府立大学高専）の湯谷博君が教えてくれたので, 講演を聴きにいきました. 湯谷君は大学の 1, 2 年生のとき同じクラスでした．そのあと，枚方市香里園の堀岡記念館で開かれていた例会にときどき出席し，インドの数学を研究され

ている林隆夫氏のお話を聞く機会もありました．

私自身が初めて近畿和算ゼミナールの皆さんの前でお話をしたのは，田村三郎先生がパズルのお話をされた 96 年の 12 月に，飛び入りで，「1997 年は，1997 の数字を上からとった 1 は素数とは言わないが非合成数で， 19 も 199 も 1997 も，下のほうの 997 も 97 も 7 も素数である．次にこのように上からでも下からでも素数（または非合成数）になるのは何年か？」という年賀パズルをご紹介したときです．われながら良くできたパズルだと思います．ちなみに，このように上からでも下からでも素数になる素数を（私の名前の頭文字をとって）S 型素数といいます．S 型素数が無限にあるかどうかは，まだわかっていません．

翌年 97 年 1 月の例会では，長谷九郎氏のご遺族をお招きし，「吉田光由の人間像を探る」というお話をしました．このころは，和算とキリシタンの関係を調べて，小説を書くことに夢中になっていました．と言っても，今までの人生で書いた小説は，四つだけです．まず，学生時代に京都の学生相談所（アルバイトの紹介所，学相と言っていました）が何周年かの記念事業として募集した小説に見事（？）第一席になった原稿用紙数枚の超短編があります．このとき，賞金をもらった記憶がありますが，いくらもらったのか，金額は覚えていません．それから 30 年近くたって、和算とキリシタン関係のものを三つ書きました．

①算盤と十字架（１）ある和算研究者の足跡

②算盤と十字架（２）毛利勘兵衛の敗走

③算盤と十字架（３）百川治兵衛の入牢

①は，豊後国東の吉田光由の無銘墓を発見された長谷九郎氏の生涯を原稿用紙 70 枚ぐらいの短編に描いたもの．②は，江戸初期に「割り算天下一」の看板をあげて京都で数学を教えた毛利重能をモデルにして，大阪方から見た大阪冬の陣・夏の陣を描いた短編です．③は，同じく江戸初期の佐渡の和算家，百川治兵衛がキリシタンの嫌疑をかけられ，入牢した一件を描いたもの．

近畿和算ゼミナールでは，「吉田光由の人間像を探る」以後，連続していくつかの発表をしました．このころから，和算ゼミはよほどのことがないかぎり毎回出席するようになりました．結局，長谷九郎氏の生涯を描いた短編小説①と和算とキリシタン関係の論考は，98 年 4 月に『華自紅―和算とキリシタン―』の一冊にまとめました．その巻頭にかかげたのが，書名の由来となった三浦梅園の「人生恨（うら）むなかれ人の知るなきを．幽谷深山，華（はな）自（おの）ずから紅（くれない）なり」という言葉．なんだか，中学生のころに座右の銘とした「大隠は朝市に隠る」の精神が続いていると思いませんか？

『華自紅』を作り，和算ゼミの皆さんはもちろん村田全先生や平山諦先生などにお渡しした結果，多くの同好の士と手紙やメールのやりとりをするようになりました．

余談ですが，小説②③は，97 年 5 月の近畿和算ゼミナールで，ジャズピアニストの小川理子さん（のちにパナソニックの執行役員）に作曲・演奏をお願いして，ピアノ伴奏つきで私が朗読しました．この実演は思ったよりも好評で，竹之内脩先生に「もう一度やってくれ」と言われたりしました．

それはともかく，近畿和算ゼミナールで和算の勉強をするために，くずし字や漢文で書かれた和算書の序文や本文を読む必要が生まれました．また，ひょんなことから，丹波篠山藩の数学教員だった侍たちの古文書を調べることになり，やはりくずし字や漢文を読む必要に迫られました．

湯谷博君の紹介で大阪府立高専の湯城吉信さんにも相談するようになりました．

●和算書の序文を読む方法

最初のうちは自主的に，それまでに翻刻されていない『算法新書』や『精要算法』などの和算書の序文と跋文（ばつぶん＝あとがき）を読んで，近畿和算ゼミナールで紹介していました．そのうち，田村三郎先生や竹之内先生，それに和算書の収集家でもある小寺裕さんなどから，「この和算書の序文を読んでくれ」と頼まれるようになりました．人間，どんなことでも誰かに頼まれると，やる気がでるものです．竹之内先生からは『四元玉鑑』や『数書九章』などの中国の古典の序文を何回か頼まれ，その度に苦心さんたんして読み下しました．小寺さんは，私が「推理を働かせて読むので楽しい」と公言したせいか，同世代の気安さのせいか，彼が新しい和算書を入手するたびに序文・跋文を読ませられました．おかげで趣味とはいえ，白文の漢文を読みくだす自分なりのシステムが出来あがりました．

①読めない漢字は，くずし字辞典や卓上版の漢和辞典で調べ，とにかく全文をパソコンに入力する．

②同時に，大漢和辞典の語彙索引で熟語が大漢和の第何巻・何ページに載っているか調べる．

③大漢和辞典で熟語の意味を（順に巻ごとにまとめて）調べ，パソコンに入力する．

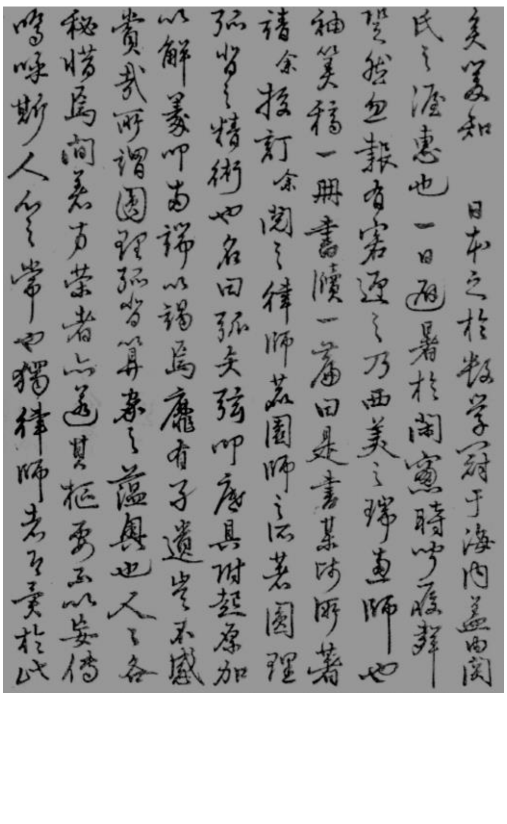
④以上で読み下せない漢文は，仏教辞典その他，現代中国で出版されている辞典などで調べる．

というシステムです．

①の卓上版の漢和辞典では，旺文社が昭和 39 年(1964)に出した漢和中辞典の初版をお勧めします．と言っても，現在ではまず手に入りませんが．この漢和辞典の初版には，「漢文を読むための漢和辞典」という精神がみなぎっており，私にはぴったりです．

②の大漢和辞典の語彙索引は，大漢和の別巻の「索引」とは別物です．古書店に「全巻揃いの大漢和」がときどき出ますが，この「語彙索引」までついているケースはほとんどありません．

もちろん，③のステップに行くまでに，漢字の判読にそうとう時間がかかります．草書や行書で書かれている漢字の中には，書いた人のクセで，読みづらいものもあります．小寺先生の依頼で 2010 年暮れに読んだ『弧矢弦（こしげん）叩底（こうてい）』という和算書の水埜政和序には，「賀」の一字としか読めない「加之（しかのみならず）」があります．



左の画像の右から 3 行目の一番上の「賀」のように見えるのが，「加之」です．ここに表示した画像の全文は，下の通りです．

矣爰知　日本之於数学冠于海内盖由関
氏之渥恵也一日避暑於閑窓時聞履聲
加之然忽報有客迎之乃西美之瑞恵師也
袖算稿一冊書牘一篇曰是書某師所著
請余校訂余閲之律師茗園師之所著圓理
弧背之精術也名曰弧矢弦叩底具附起原加
以解則叩両端以竭焉靡有孑遺豈不感
賞哉所謂圓理弧背算家之薀奥也人々各
秘惜焉間著方策者亦遂其樞要不以妄傳
嗚呼斯人心之常也獨律師者今異於此

読みくだすと，

矣（＝前文の最後にある置き字）．爰（ここ）に〔闕字〕日本の数学に於ける海内（かいだい）に冠たるを知る。蓋（けだ）し関氏の渥恵（あくけい）に由（よ）る也。一日（いちじつ）閑窓（かんそう）に避暑し、時に（＝そのとき）履聲（りせい＝くつおと）を聞く。加之（しかのみならず）然忽（＝忽然）客ありと報ぜられ、これを迎えれば、乃（すなわち）西美（＝西美濃、大垣周辺）の瑞恵師也。算稿一冊、書牘（しょとく＝手紙）一篇を袖にし、曰く『この書、某師の著わすところ、余の校訂を請う』。余、これを閲（けみ）すれば、律師茗園師の著すところの円理弧背の精術也。名づけて曰く弧矢弦叩底と。具（つぶさ）に起原を付し、加うるに觧（＝解）を以てす。則ち両端を叩いて以て竭（つく）す。孑遺（けつい）あること靡（な＝無）し。豈（あに）感賞せざるや。所謂円理弧背、算家の蘊奥（うんのう）たるや、人々各（おのおの）これを秘して惜み、間（このごろ）方策（＝書物）を著す者もまた、その枢要を遂げて以て妄に伝えず。嗚呼斯（これ）人心の常也。獨（ひとり）律師は今、ここに於いて異なり、

となります.

「爰（ここ）に」とか「間（このごろ）」は，慣れてくるとすぐ読めますが，慣れるまでは漢和辞典よりも古文書などの史料の読み方が書いてある本を調べたほうがいいかもしれません．以前「以来タ」と熟語「以来」にどうみてもカタカナの「タ」の送りがながついているものがありましたが，これは「このかた」と読みます．このような「熟字訓」があるのが，日本人が書いた漢文の特徴でもあります.

「乃西美」もそうとう苦労して読んだ記憶があります．もちろん大漢和辞典には載っていません．考えに考えたあげく，この序文を書いた水埜政和が尾張の人なので，西美が西美濃を指すことに気づきました．国史大辞典に西美の用例が 1 個だけあったように覚えています．「乃」はここでは「すなわち」です.

「両端を叩いて以て竭（つく）す」は『論語』の子罕（しかん）篇にあります．和算書の序文にときどき登場します．こうした成語の意味は，先に述べた旺文社の漢和中辞典の「両」のところに出典とともに書いてあります.

水埜政和の序文の最後には，「文政紀元戊寅仲冬，尾張，鳧山・水埜政和誌」とあります．戊寅（ぼいん）は六十干支の一つで，文政紀元戊寅は文政元年(1818)，仲冬は旧暦の 11 月を意味しています．日本や中国には，この仲冬のように旧暦の 12 ヶ月の呼び方にいろいろな異名があります．毎回調べるのが面倒なので月の別名が一覧できる表を，はじめは富士通のワープロ OASYS で，次にはウィンドウズ・パソコンの表計算ソフト・エクセルでつくりました．この 12 ヶ月の別名は最終的に全部で 1500 個ぐらい集め，2005 年 10 月に『エクセル版 12 ヶ月の別名』として出典の間の統計分析（主成分分析）を交えて一冊にしました.

④の例では，『算法助術』北村政房序の「龍猛（りゅうみょう）の七芥子（けし）」．これも大漢和には載っていません．仏教関係の辞典を必死に調べて，龍猛（ナーガルジュナ）が芥子つぶを投げつけて誰も開けられなかった鉄塔の扉を開けたという故事を発見しました.

大原利明の『算法点竄指南』山本北山（北山老人）序にある「利西泰」は，利瑪竇（りまとう＝マテオ・リッチ）の字（あざな＝別名）である，と上海出版社の『辞海』に載っています．日本の辞典には見当たりません.

自分で言うのもナンですが，こういうレベルになると，インターネットは何の役にも立ちません.

インターネットでは調べられない分，自分であれこれ推理する楽しみがあります.

なお，最初に読みにくい字の代表としてあげた「加之」ですが，明治 45 年 3 月 29 日の官報の，服部宇之吉博士らが答申した「漢文教授に関する調査報告」には，所謂（いわゆる）・加之（しかのみならず）・就中（なかんずく）・云爾（しかいう）の四つには「返り点を施さず」とあります．

●2006 年 9 月の和算ゼミで

そうこうするうちに，2006 年春に至り，田村先生のご指名により私も近畿和算ゼミナールの幹事というか世話役をおおせつかりました．和算ゼミの幹事は，例会ごとの案内はがきを発送し，例会では司会をするのが大きな仕事です．ところが，9 月の例会で発表予定の本上亮典氏が怪我をされたとかで，急きょ代役を立てるハメになり，どなたにもうまく連絡がとれず，仕方なく私自身が何か発表することにしました．正直なところ，本上亮典氏の代役をすすんでこれ幸いと引き受けました．

忘れもしない 2006 年 8 月上旬には，すでに「漢文の返り点を数学モデル化する」ことは思いついていました．京阪電車の寝屋川市駅（府立高専の最寄駅）の駅前にある喫茶店で，湯谷博君と湯城吉信さんに，私の思いつきを伝え，今後，どう研究を進めてゆけばよいかを相談しました．カッコつき表示は，もともと，湯城さんからもらったメールのなかに漢文をカッコでくくった文章があったので，そこからひらめいたアイデアです．後日，このことを湯城さんに話すと，「カッコつき表示に何となく親しみがあったのは，そのせいかもしれない」と言っていました．

それで，9 月 10 日の例会までの 1 週間ほどの間に大急ぎで「漢文訓読のアルゴリズムとカッコつき表示」という A4 で 20 ページほどの大論文（？）を書き上げました．

この？つきの大論文の特徴は，

①漢字連結記号でつながれた漢字列をひとまとまりと見なしている．

②一二点，上下点，東西点などを「順序点」，レ点もふくめて「一般順序点」，これらが付いている漢字列を「一般順序点列」とよぶ．

③返り点つき漢文に含まれている漢字は（漢字連結記号の漢字を無視すると）4 種類に分類できる．

④一般順序点列は，返読するそれぞれの漢字に読む順を示す番号をつけて表示できる．

⑤番号つきの一般順序点列は，返読する（先に読む）部分をカッコでくくった「カッコつき表示」ができる．

⑥カッコつき表示を利用すると，カッコを機械的にはずして，返読後の漢字列が得られる．

などになろうかと思います．

このときは，今にして思えば，「返り点つき漢文を記号化し，形式的に表現する」ことに重点を置いていました．

たとえば，③は，従来の漢文の教科書や研究書にはまったく無かった（と思う），いわば逆転の発想にもとづくものです．たとえば，アルファベットを漢字 1 字として，

A $_{レ}$B $_{二}$CD $_{一レ}$E

に含まれる漢字 5 字のうち，A と C はレ点と順序点のどちらももたない「無点漢字」であり，B はレ点と順序点の両方をもつ「レ点順序点漢字」，D は順序点だけをもつ「順序点漢字」，E はレ点だけをもつ「レ点漢字」という 4 種類に分類できます．ここで，レ点はうしろの漢字に付属していることを注意しておきます．順序点は前にある漢字に付属しています．ですから B はレ点と順序点の両方をもっており，

D $_{\text{一レ}}$E

の「一」は前の D に，「レ」はうしろの E に付属しています．

⑤⑥の「カッコつき表示」は，返り点つき漢文の「返読」は，βを先に読む漢字列，αをあとから読む漢字列として，

α（β）

の形に表せる，というものです．αの漢字列は漢字連結記号（ハイフン）でつながっています．

この大論文（？）の最後に示したカッコ付き表示の例文は，『量地指南』の穂積英の序文でした．

徃古聖人仰俯觀察而垂$_{\text{二}}$其象$_{\text{一}}$能使$_{\text{二}}$天下後世$_{\text{一}}$無$_{\text{下}}$一物不$_{\text{レ}}$得$_{\text{中}}$其所$_{\text{上}}$所－$_{\text{三}}$以振－$_{\text{二}}$起其英靈$_{\text{一}}$而人本$_{\text{二}}$乎天性$_{\text{一}}$莫$_{\text{レ}}$不$_{\text{下}}$因$_{\text{二}}$其已知之理$_{\text{一}}$而益窮$_{\text{レ}}$之以求$_{\text{上レ}}$至$_{\text{二}}$乎其極$_{\text{一}}$者也

このうち「所以」と「振起」は漢字連結記号で結ばれている熟語です．

この例文のカッコ付き表示は，

徃古聖人仰俯觀察而垂（其象）能使（天下後世）無（一物不（得（其所）））所－以（振－起（其英靈））而人本（乎天性）莫（不（因（其已知之理）而益窮（之）以求（至（乎其極））））者也

です．

カッコと 2 カ所の漢字連結記号をはずし，読みやすいように句読点をつけると，

徃古聖人仰俯觀察而其象垂、能天下後世使、一物其所得、不、無、其英靈振起、所以、而人乎天性本、其已知之理因、而益之窮、以乎其極至、求、不、莫、者也

読み下し文は，次のようになります．

徃古ノ聖人仰俯観察シテ而其ノ象ヲ垂、能ク天下後世ヲシテ使、一物モ其ノ所ヲ得、不ルコト、無ラシム、其ノ英靈ヲ振起スル、所以ニシテ、而人ハ乎天性ニ本ク、其ノ已ニ知ル之理ニ因テ、而益之ヲ窮メテ、以テ乎其ノ極ニ至ルコトヲ、求メ、不トイフコト、莫キ、者也

2006 年 9 月 10 日の和算ゼミでの発表は，「返り点つき漢文と読み下し文の中間に位置するカッコ付き表示を使うと，返り点つき漢文の自動読み下しが容易におこなえる．最終的には，白文の中国語の自動翻訳を実現したい」と締めくくりました．

要するに，この時点では，工学的な色彩が強く，ちゃんとした数学モデルにはなっていませんでした．

なお，カッコ付き表示の丸カッコ（　）は誤解されやすいので，これ以降は，

α＜β＞

のように，＜　＞を使うようにしています．

●2 つの入れ子

2006 年 9 月の大論文（？）の眼目は，「すべての返り点はカッコで表現できる」「カッコと漢字連結記号（ハイフン）だけで，漢文の語順変換は表現できる」という工学的な点にありました．私が学生時代に読んだ科学方法論の一つである，武谷三男の三段階論で言えば，実体論の段階でした．なぜそうなるのか，という本質論としての説明はできていませんでした．たとえば，

A$_{\text{二}}$B$_{\text{レ}}$CD$_{\text{一}}$

のレ点で結ばれた「B$_{\text{レ}}$C」が A の二点と D の一点にはさまれた，「入れ子」になっていることはすぐにわかります．このカッコつき表示は，

A<B<C>D>
です．ここでは，まさしく
A< >
のなかに，
B<C>D
が入れ込まれ，二つのカッコが「入れ子」になっています．ロシアのマトリョーシカ人形や箱根細工のように，外側のカッコのなかに同じかたちの内側のカッコがあります．
このような入れ子構造が，なぜ中国語から日本語への翻訳をするときに見られるのか，本質的な説明は，漢文の文法つまり漢文法の研究者からはまだおこなわれていないと思います．
レ点と一二点，一二点と上下点，上下点と東西点，…，といった，こうした入れ子の他に，もう一つ，返り点つき漢文独特の入れ子構造があります．それは，たとえば一二三点の場合です．
A 三 BC 二 DE 一
このカッコつき表示は次のようになります．
A<BC<DE>>
これは，
A< >
のなかに，
BC<DE>
が入れ子になっています．
レ点が続く構文も，この種の入れ子構造をもっています．
A レ B レ C
このカッコつき表示は，
A<B<C>>
です．A< >のなかに B<C>が入れ子になっているのがおわかりいただけるでしょう？
「すべての返り点はカッコで表現できる」は，「すべての返り点は入れ子構造になっている」と言いかえることができます．
なぜ中国語から日本語への翻訳においてこのような入れ子構造が生じるのか，本質的なことは最初の思いつきから 5 年以上たったいまもわかっていません．本質は不明ですが，実体として，中国語から日本語への語順変換にはこのような入れ子構造があるのです．

●漢文教育学会へ投稿

2006 年 9 月に和算ゼミで第一弾の発表をしたあと，湯城さんと相談し，漢文教育学会に論文を投稿することにしました．題名は「訓読アルゴリズムの括弧付き表示―返り点の情報理論―」とし，初稿はわたしが書きました．私としては，訓読アルゴリズム（計算手順と訳されます）がカッコつき表示でシンプルに表せることだけを言いたかったのですが，湯城さんの意見を取り入れ，このような分析をおこなう意義についても触れました．
原稿の最後には，「訓読のグラフ表示」という章を設け，「情報理論の中のオートマトン言語理論には，

言語学者 N.チョムスキーの「構文木」と呼ばれる表示がある．訓読のグラフ表示は，この構文木に似た樹木（ツリー）の形をしており，「訓読の木」と命名してよい」と，今にして思えばそうとうペダンティックにグラフ表示を紹介しました．

このグラフ表示は，①出発点と最後に帰着する点を兼ねた◎，②そのままの順で漢字列を読む●（この論文では順節とよんでいた），③ひっくり返して漢字列を読む○（この論文では逆節とよんでいた），④往路と復路をもつ辺，⑤返り点つきの漢字列，の 5 つ組からなる，直線的な返り点つき漢字列を平面的に視覚化（ビジュアライズ）したものでした．

漢文教育学会の雑誌への投稿は年内が締切りだったので，何度も湯城さんとやりとりをして，12 月 22 日には完成原稿を作り上げ，漢文教育学会の会員であった湯城さんに託しました．

結果から言うと，この原稿は漢文教育学会の審査（査読）をパスせず，リジェクト（拒否）されました．2007 年 2 月 23 日に，湯城さんあてに届いた手紙は，おおよそ次の 3 点をあげて掲載には不適切と言ってきました．

①何のために訓読アルゴリズムの分析を行うのか，それによって漢文教育にどのような効果を期待しうるのか，よくわからない．

②返り点を立論の出発点にしているのは，問題である．

③漢文教育に対する認識不足があるのではないか．

とくに③では，原稿では先に述べたように「レ点はうしろの漢字（縦書きの文では，下の漢字）に付属している」ことを指摘したわけですが，手紙では「些末に過ぎる議論であろう」と一蹴されました．

この回答を読んだわたしは，掲載を拒否されてホッとしました．というのも，わたしの思いついたカッコつき表示や訓読の木は，数学としては未完成だと自覚していたからです．一方の湯城さんは，手紙を読んで怒り心頭に発し，「言葉が通じていない．お門違いの批判」と漢文教育学会への公開質問状（案）を書かれました．

この公開質問状（案）の最後は，「なお」と断って，「査読結果を「鶴見大学」の封筒の名前の部分を斜線で消した封筒で送るのは問題ではないか」と締めくくっています．わたしは，この部分を読んで，湯城さんの怒りがひしひしと伝わり，湯城さんには申し訳ないですが笑ってしまいました．

なお，漢文教育学会に拒否されたおかげで，湯城さんの研究意欲に火がつき，2008 年春の「形の文化会」の雑誌に「レ点はどの字に付くか？—改行時のレ点の位置—」という，名目上はわたしとの共著の論文を書かれました．

この論文の原型は，2007 年 4 月 29 日に東京で開かれた，形の文化会の例会で湯城さんが発表された話題です．わたしは例会に行かなかったので，「漢文訓読のグラフ表示（訓読の木）とカッコつき表示」という，訓読の木の読み方・作り方のルールを書いた資料をこしらえ，形の文化会で配ってもらいました．すると，『和算の成立』の著者で，和算とキリシタンの関係について，私とひんぱんに手紙のやりとりをしていた鈴木武雄さんが，例会に出席されており，私の名前に気づいて湯城さんと話が盛り上がったようです．

●年賀パズルの景品として

わたしは 30 歳になる前から 30 年近く，趣味と実益をかねて，神戸製鋼・溶接事業部の技術広報誌（月

刊）に雑文と数学パズルを連載していました．この連載は数年前に終わりましたが，今でも毎年の年賀状には数学パズルを掲載し，回答者には景品として私が書いたものを差し上げています．

2007 年「訓読の手順と返り点」改め「漢文の条件」

2008 年「衛気行篇（えきぎょうへん）算法」の校注

2009 年「江戸時代の医者がもっていた暦の知識（要約）」

2010 年「漢文訓読の 3 つの数学的モデル」

2011 年『関流見題免許状』および『弧矢弦叩底』序文（どちらも小寺裕所蔵）の翻刻

2012 年「漢文訓読と順列行列のお話」

以上がここ数年の年賀パズルの景品です．

すこし解説を加えますと，2007 年の「漢文の条件」は，前にご紹介した大論文（？）以降に考えた「返り点つき漢字の標準形」「漢文脈と欧文脈の違い」などを書いています．なにぶんパズルの景品といういたって個人的趣味的産物ですから，かなり勝手なことをいろいろと書いています．読み返してみると，リカージョン・セオリー（再帰理論とでも訳すのか，日本語訳不詳）の Kleene（クレーニまたはクリーニ）を「いま，いちばん注目している人」と書いており，訓読アルゴリズムの本質論というか再帰的に定義した数学モデルにもとづく演繹的な論証をしようとしていたことがよくわかります．

2008 年と 2009 年の景品は，2007 年夏に武田薬品の杏雨書屋（きょうう・しょおく）研究奨励賞に当選（？）した関係で，江戸時代の医学および医学者とくに堀（ほり）元厚（げんこう）について調べていたので，そのついでに書きました．ここで完全な余談ですが，府立中之島図書館の写本「納音（なっちん）算法」は，堀元厚の著作ですが，これまで誰も詳しく調べた形跡がありません．ほぼ同一のものが，杏雨書屋所蔵の「ある本」のなかに含まれています．

2010 年がのちほど述べる 2009 年 9 月に計量国語学会で発表したレジュメにもとづいたもの．

2011 年は，漢文訓読関係はひといき入れて，小寺裕さんに頼まれた翻刻を景品にしました．『弧矢弦叩底』の翻刻の一部は，先に長々とご紹介しました．

それで，2012 年の景品が，この「漢文訓読と順列行列のお話」というわけです．

●府立高専の研究紀要に

湯城吉信さんとは，漢文教育学会への投稿と並行して，大阪府立高専の研究紀要への投稿も相談しました．湯城さんは，いわば研究のプロフェッショナルで，論文を書いて雑誌に投稿するのが仕事の一つです．アマチュアの私は，これまでにいちおう論文と呼べるものをいくつか書いていますが，和算ゼミの先生方に発表するように勧められたものか，よほど自分で気に入ったものしか発表していません．

大阪府立高専の研究紀要には，以前に湯谷博君との共著で「内田五観『彗星真言』校注と解説」を掲載したことがあった（多少書き加えた論文を京大数理研でも発表している）ので，それほど抵抗なく，湯城さんと共著の体裁をとって投稿することにしました．

漢文教育学会とは異なり，府立高専研究紀要は無審査です．それでも，わたしの思いつきを世に出す第一号になるので，一生懸命考えに考えて書き，何度も湯城さんに見せては訂正しました．実際は，英文の表記や紙面のヘッダーやレイアウトの訂正に時間がかかったように思います．

出来あがった 4 ページの論文「漢文訓読の数学的構造について」は，

1.はじめに

2.一般順序点の概念

3.漢文訓読の構造

4.返読の再帰的定義とカッコつき表示

5.グラフ表示

という構成です.

「1.はじめに」では，返り点のシステムは，歴史的に進化した自然言語をあつかう自然言語，つまり自然メタ言語であることを述べ，「2.一般順序点の概念」では，返り点つき漢文を構成する漢字は，訓読するときの順番を示す連結記号（ハイフン）と番号が付けられること，「3.漢文訓読の構造」では，そうした返り点つき漢文は，文章を並べる並置構造と（先に「●2 つの入れ子」で述べた）入れ子構造からなっていることを指摘しています.

「4.返読の再帰的定義とカッコつき表示」がこの論文の眼目で，有限個の（すべての）漢字（無定義用語）の集合ΣおよびΣの元を重複を許して有限個並べたすべての順列の集合Σ^*（漢文言語とよぶ）上の，2 つの 2 項演算

u・v=uv（連接）

u<v>=vu（返接）

を定義して，どちらの演算でもΣ^*が空順列λを単位元にもつ半群すなわちモノイドになることを示しました．この空順列λは，水谷静夫『言語と数学』の空連糸（null string）の概念を参照しました.

このあたりまでが，今でもなかなかよく出来ていると思う部分ですが，このあとのカッコつき表示の定義（いちおう再帰的に定義している）やグラフ表示の定義は，まあ，いちがいに「間違い」とは断定できませんが，構成的・帰納的なもので，今では自分でも目をそむけたくなります．このときのカッコつき表示やグラフ表示については，「二度と見たくない」というのが私の本音です.

ちょっと深遠な数学の話をこれからのべるので，以下の 7 行は数学に興味のない方は読みとばしていただいてけっこうです.

この「漢文訓読の数学的構造について」では，上に述べたように，（すべての）漢字の集合Σの元の個数を「有限個」にしました．Σを有限個にすると，Σの元の全順列である漢文言語Σ^*の元は可算個になります．かりにΣを可算無限とすると，Σ^*は対角線論法によって非可算になると思います．この「漢文訓読と順列行列のお話」の「２．不思議な順列行列の世界」では，Σを有限にした場合のこと，つまりベクトル空間上の順列行列の話を書いていますが，案外，Σ を無限にして、無限次元の順列行列つまりヒルベルト空間上の「群」を対象にしたほうが，話が簡単になるかもしれません．しかし，フォン・ノイマンほどの知性があればともかく，わたしにはとうてい考えられそうにもありません.

●漢文訓読の現象論

2007 年 2 月ごろに府立高専紀要の「漢文訓読の数学的構造について」の原稿を書き上げたあと，数か月間は，数学的精神を活性化することをやめ，「和算書の漢文とくに序文の読み方」を近畿和算ゼミナールで発表したりしていました.

このとき，和算ゼミに来ていた大学院生に配った資料の内容を紹介しましょう.

この資料は，入門編・応用編・付録「おもな旧字体」の三つにわかれています．
「入門編・和算書の漢文の読み方」は，

1.返り点

2.返読文字

3.再読文字

4.助辞

5.仮名の合字

6.その他の注意事項

という構成で，たとえば「5.仮名の合字」では，「シテ」「トモ」「トキ」「コト」の，漢文の送り仮名に頻出する「仮名の合字」を説明するなど，初心者には欠かせない知識を紹介しています．
「応用編・和算書の漢文とくに序文の読み方」の構成は次の通りです．

(1)竪点（たててん）の読み方

(2)平出・擡頭・闕字

(3)朱引きの意味

(4)句読点の種類

(5)年月日の表記

(6)一人称

(7)発語・終語

(8)時期をあらわす語句

〔番外〕書き出しのパターン

たとえば「(4)句読点の種類」では，圏（〇）・小圏（◦）・批（ヽ，〃，・）などを紹介しており，きわめて実戦的な「漢文の読み方」になっています．そもそも(1)の「竪点（たててん）」（漢字連結記号，ハイフン）などは，物知り博士が集まっている和算ゼミでも，どなたもご存じなかった言い方です．先に「以来タ」を「このかた」と読むと述べましたが，(8)では私が経験から知った，このような時期をあらわす熟字訓をたくさん集めています．(8)に書いておいたクイズを出しておくと，『発微算法』関孝和序では「爾来（じらい）」に「爾ヨリ来タ」と送り仮名がついています．これは何と読むでしょうか？

●再帰的定義とは？

さて，数学の方面に話をもどします．
初めてカッコつき表示を思いついた 2006 年夏からちょうど 1 年が経過した 2007 年夏，ようやくカッコつき表示を再帰的に定義しました．2007 年 9 月 9 日の和算ゼミで発表した「漢文から日本語へ―訓読アルゴリズムの形式化―」がそれです．
ここでは，初めに，すべての漢字（無定義用語）の集合Σと，その全順列からなる漢文言語Σ*を定義したあと，「漢文言語Σ*において，「カッコつき表示」を次のように再帰的に定義する」と宣言し，

（ｉ）漢字 1 字はカッコつき表示である．

（ⅱ）カッコつき表示とカッコつき表示の連接はカッコつき表示である．

（ⅲ）P を漢字 1 字または連結記号で結ばれた 2 字以上の漢字，m をカッコつき表示とするとき，P

と m の返接 P<m>はカッコつき表示である.

という三つの文章でカッコつき表示を定義しました.

再帰的という耳慣れない言葉を平たく言うと,「定義される用語が定義する文章のなかに含まれている」こと．たとえば,

（ｉ）ユークリッドは数学者である.

（ⅱ）数学者に「君は数学者である」と言われた人は数学者である.

という二つの文章は，「数学者」を再帰的に定義しています.

（ｉ）（ⅱ）を合わせると，ユークリッドに数学者と言われた人は数学者ですが，その人にまた「君は数学者である」と言われた人も数学者です.

このように再帰的な定義の場合，最初の人（最初のもの）が大切で，先のカッコつき表示の再帰的定義では（ｉ）の「漢字 1 字はカッコつき表示である」が大切になります．この（ｉ）があるので，（ⅱ）と合わせて，漢字 2 字，3 字，…はカッコつき表示になります．また（ⅲ）を合体すると，返接のカッコ内の m にあたるところが何重にも入れ子になることが可能になります．さらに（ⅱ）にもどって，有限個の漢字列（漢文言語Σ^*の元）と，漢字連結記号でつながった漢字列 P とこのような入れ子構造をもった漢字列 m との返接 P<m>との連接が可能になります.

再帰的定義の特徴は，このように入れ子が何重にもなるケースに対応していることです．実際問題として，返り点の入れ子の度合いが

A㆑B㆑C㆑D㆑E㆑F㆑G　カッコつき表示では A<B<C<D<E<F<G>>>>>>

のように 6 重なんかになることは，滅多にはありませんが.

なお，カッコつき表示の定義の（ⅲ）で「P を漢字 1 字または連結記号で結ばれた 2 字以上の漢字」としていますが，私の知るかぎりでは，古田島洋介『これならわかる返り点—入門から応用まで—』に示されている,

比－㆓肩－接－踵　一時㆒　（一時に比肩（ひけん）接踵（せっしゅう）す）

という漢字 4 字が連結記号で結ばれた P があるだけで，これ以上の字数の P は見たことがありません．かりに存在したとしても，（ⅲ）の定義は「2 字以上」ですから，何字でも OK になっています．ちなみに，上の例文は頼山陽『日本外史』にあるものですが，何種類かある『日本外史』の訓点本の中には，上の（連結記号を含む）返り点のつけ方とことなっているものもあります.

この P に関して，「漢文から日本語へ—訓読アルゴリズムの形式化—」の本文では、上のように「漢字 1 字または連結記号で結ばれた 2 字以上の漢字」としましたが，「注」では，「広義のカッコつき表示」として，P の中で返接がおこるケースを定義しています．これは，漢文（中国語）から英語への翻訳などで発生する現象になります.

具体的には，『論語』の

有朋自遠方来不亦楽乎

は次のように英訳されています（Legge 1861）．（「亦」は英訳では省かれている）

Is it（乎）not（不）delightful（楽）to have（有）friends（朋）coming（来） from（自）distant（遠）quarters（方）?

この英訳の構造は、広義のカッコつき表示により，｛　｝記号をつかえば，表現できます.

｛ 有朋自－遠－方〈来〉｝〈不－亦－楽〈乎〉〉

P にあたる部分で返読が発生していることがおわかりいただけるでしょうか？

●カッコつき表示を数え上げた！

2007 年 10 月 14 日に京都の同志社大学で，日本数学史学会と近畿和算ゼミナールの共催により「数学史研究発表会」が開かれました.
ここでは，和算ゼミで発表してきた内容をより数学的なレジュメにまとめ，「漢文訓読のアルゴリズムについて」と題してお話をしました.
特筆しなければならないのは（すでに 9 月の和算ゼミでは発表していましたが），カッコつき表示を再帰的に定義することにより，「生成されるカッコつき表示の総数」を数え上げることができた，ということです.
一般に，漢字 n 字から生成されるカッコつき表示の総数をa_n（$a_0 = 1$と仮定）とすると，

$a_1 = 1$

$a_2 = 2$

は明らかです．漢字 1 字の場合，カッコつき表示は 1 通りしかなく，漢字 2 字（A，B）の場合は，

AB

A<B>

の 2 通りしかないからです.
一般に，漢字 n 字からなるカッコつき表示の総数は，下の①②③の合計になります.
①最初の漢字の直後にカッコ開始記号<　や連結記号－　がないときの総数は

a_{n-1}

に等しくなります.
②最初の漢字の直後にカッコ開始記号<　があるものは,

$$\sum_{r=0}^{n-2} a_r a_{n-r-1}$$

となります.
③最初の漢字の直後に連結記号があるものは,

$$\sum_{i+j=1}^{n-2} a_i a_j \quad \text{（ただし総和は} i \geq 1, j \geq 0 \text{ の条件のもとで求める）}$$

と表せます.
よって，①②③の合計a_nは,

$$a_n = a_{n-1} + \sum_{r=0}^{n-2} a_r a_{n-r-1} + \sum_{i+j=1}^{n-2} a_i a_j$$

となります.
この漸化式は，和算ゼミの大西正男先生が 2 階の階差をうまく利用して,

$$a_{n+1} = 3a_n + a_{n-1} + \sum_{i=2}^{n-2} a_i a_{n-1} \qquad (n \geq 4)$$

という式に変形してくださいました.

●大教大の鵜久森君

2007 年の暮れに，それまで湯城さんが「一緒に研究しませんか」と呼びかけ，オートマトンのことなどを私が質問していた大阪教育大学の望月久稔さんに連絡するよう，湯城さんからメールがありました.
望月さんは大教大の前は府立高専で教えられていたので，湯城さんとは顔見知りでした.
望月さんの用件は，指導している鵜久森将隆君という学生が卒業にあたって「訓読アルゴリズムの設計と実装」を情報処理学会で発表するので論文の共著者になってほしい，というもの.
それで，一度だけ 12 月 17 日にはるばる豊中市蛍池の自宅から柏原市の大教大まで行き，鵜久森君が発表の練習をする様子を見物しました.
鵜久森君の論文の正式名称は「一般順序点と訓読木を導入した訓読アルゴリズムの設計と実装」．著者は，大阪教育大学の鵜久森正隆，望月久稔，それに「関西学院大学」の島野達雄になっていました．私は関学の非常勤講師を 2001 年秋からやっていますが，文科系の（ファッションは最先端ですが，性格はのんびりした）学生たちにウィンドウズ・パソコンをつかって「プレゼンテーション（発表）の技法」をちんたら教えているだけです．所属を関学にしたのは，鵜久森君の論文にいわゆる「ハク」をつけるためです.
論文の内容は, 要は, 返り点つき漢文を自動的に日本語の語順に並べ替えるソフトを Java 言語で作った，というものです.
鵜久森君は，2006 年 9 月の私の大論文（？）を 10 回以上，読んだそうで、誰よりも（たぶん私よりも）一般順序点や訓読の木の扱いには慣れていました.
2008 年 3 月 15 日の情報処理学会・人工知能のセクションでこの論文（和算ゼミでも一度，この論文の話をしてもらいました）を発表した彼は，大教大を卒業すると，阪大工学部の大学院に入り，学生時代と同じテーマで修士課程の卒論を書いたようです.
阪大大学院在学中，彼の下宿と私の自宅が近かったので，メシをおごってやると，彼はがつがつ食べていました．彼が貧乏だったのは，週に一度，東京にいるガールフレンドに夜行バスで会いに行っていたせいでしょう．大学院を卒業後は，そのガールフレンドのいる東京の一流企業に就職したようです.

●いざ計量国語学会へ

2009 年は「●年賀パズル」のところで書いたように，武田薬品・杏雨書屋（きょうう・しょおく）の研究奨励賞の報告が締切りになった年です．このとし春には杏雨書屋へ，（形だけの）医学や医学者に関する論文と，数学史研究発表会の「漢文訓読のアルゴリズムについて」を提出しました.
それでホッとしていたとき，何のはずみか忘れましたが，「漢文訓読のアルゴリズムについて」の漸化式は，竪点（たててん）がない場合はうんと簡単になる，とひらめきました.
竪点つまり漢字連結記号（ハイフン）を使わない場合，漸化式は，

$$a_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i a_{n-i-1} \qquad (a_0 = a_1 = 1)$$

となります.

このかたちの漸化式の母関数を使った解法は，古くから知られています．多少，計算が必要ですが，

$$a_n = \binom{2}{2}\binom{6}{3}\binom{10}{4}\cdots\binom{4n-2}{n+1} == \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

となります.

ここから，後項対前項の比の極限,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n+2}{n+2} = 4$$

を計算し，「十分に大きな漢字列では，1 字増えると日本語への翻訳の可能性が 4 倍だけ増える」という結論を導きました.

そこで思いついたのが，このことを計量国語学会で発表しよう，ということ.

ついでに，カッコつき表示とあわせてグラフ表示，行列表現も再帰的に定義しようと思い立ち，2009 年 3 月，計量国語学会に入会手続きをおこない，7 月ごろには要旨を添えて発表を申込みました．情報処理学会の鵜久森君のときと同じように，「ハク」をつけるために計量国語学会でも所属を「関西学院大学」にしておきました．確か予稿（レジュメ）の締切りは 8 月上旬で，1 週間ほど前に事務作業をしていた同志社の大学院生にメールで送ったのはよいけれど，その後，細かい部分の訂正を 3 度ばかり申し入れて，われながら面倒な男だなと反省しました.

カッコつき表示（レジュメではカッコつき表示（Ⅱ）としているが，ここでは（Ⅱ）を省きます），グラフ表示（訓読の木），行列表現（訓読行列）の再帰的定義は次の通りです.

カッコつき表示の場合の「連結項」（漢字連結記号で結ばれた漢字列）は先にやはり再帰的に定義しておきます.

①漢字 1 字はカッコつき表示である.

②連結項とカッコつき表示の返接はカッコつき表示である.

③漢字 1 字または②の条件を満たす返接と，カッコつき表示の連接はカッコつき表示である.

グラフ表示（訓読の木）も同様です．「連結枝」は先に定義しています.

①漢字 1 字は訓読の木である.

②左辺が連結枝，右辺が訓読の木の返接ノードは訓読の木である.

③左辺が漢字 1 字または②の条件を満たす返接ノード，右辺が訓読の木の連接ノードは訓読の木である.

最後の行列表現（訓読行列）も同じように定義します.

①1 次の単位行列は訓読行列である.

②k 次（k≧1）の単位行列と訓読行列の逆対角配置は訓読行列である.

③1 次の単位行列または②の条件を満たす逆対角配置と，訓読行列の対角配置は訓読行列である.

こうして並べてみると，カッコつき表示，グラフ表示，行列表現のそれぞれの定義が，いわゆる術語を入れ替えただけの，まったく同等な定義になっていることがよくわかります.

9 月 12 日，関学と同じようによく映画の撮影に使われるキレイな東京女子大学キャンパスで，計量国語学会第 53 回大会が開かれました．私のような海のものとも山のものともわからない新人は，はやく発表させられるのが学会なるものの慣習でして，トップバッターとして持参のノートパソコンのプレゼンソ

フトを使って約 20 分で発表しました．
質問の時間になって，最初に，計量国語学会の創始者で，私が参照した『言語と数学』の著者，水谷静夫先生から，「今や無位無冠の水谷です．この学会を作ったとき，漢文の研究者にも声をかけたが，誰ものってこなかった」と述べられ，おおいに感激しました．けれども「…ところで，置き字の焉や乎はどう扱うのかね？」と尋ねられ，「ここで扱っているのは，返り点のシステムだけです．漢字の意味や役割は問題にしていません」と答えました．実は，水谷先生から最後に受けた質問は，初期のころの和算ゼミで受けた質問と同類のもので，漢字の意味や役割でなく，語順変換を考察の対象にしていることは，旧制の「国漢英数」の世代には，なかなか理解されないようです．同じような質問を鵜久森君も何度も受けたと言っていました．
次に質問に立ったのが，同志社の I 教授でした．「最初の例文，What are you writing?のアナタハ何ヲ書イテゴザルカという訳文は日本語としておかしい」とのご意見．これは古田島洋介さんの本にも紹介されている，明治時代の翻訳で，私は返り点のつけられない例として示したものです．「そんな意見は訳した人に言ってほしい」と返すと，会場は爆笑の渦でした．
その次の質問者は，計量国語学会の会長．「意味を調べることが重要である．意味を捨象するとは何事か」という趣旨のことを長々と述べるので，私は「いずれ将来は意味も含めた分析ができるようになるでしょう」と言っておきました．
実は翌 2010 年の計量国語学会で，2009 年の会長のあまりにもくだらない質問に対する，ある種の腹いせで，「意味」を含めた統計分析の例として「十二ヶ月の別名による古辞書・類書の統計分析」という発表をしたのですが，そのときも会長は「意味を捨象するとは何事か」という趣旨の信念（？）を長々と喋り，漢文教育学会の返答に怒りの炎を燃やされた湯城吉信さんに負けじと，わたしも大いに腹を立て，2011 年の計量国語学会は発表も出席もしませんでした．今年あたり退会しようと思っています．
ものの本質を探ろうとしない知ったかぶりの似非（えせ）研究者に禍（わざわい）あれ，とアマチュアの分際（ぶんざい）で願う今日このごろです．

14 ページのクイズの答「これよりこのかた」

２．不思議な順列行列の世界

●順列行列って何だ？

まず順列行列とはどんなものかを説明しましょう．順列行列はシンプルで美しい形をしています．
順列行列とは，２種類の数字（0 と 1）を，それぞれの行と列に 1 が一つだけあり，その他は全部 0 にして正方形のかたちに並べ，カッコでくくったものをいいます．各行各列に 1 が一つだけあり，その他は全部 0 になっているのが順列行列です．行は横の並び，列は縦の並びをいいます．
たとえば，2×2 の正方形のかたちをしたもの（これを 2 次の正方行列といいます）の中では，

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

が順列行列です．この 2 個を「2 次の順列行列」といいます．2 次の順列行列はこの 2 個しかありません．
1×1 の場合は「1 次の順列行列」といい，

$$(1)$$

の 1 個があります．1 次の順列行列では「その他」にあたるものがないので，0 はありません．
3 次の順列行列は下の 6 個です．

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

では，4 次の順列行列は何個あるか，わかりますか？
正解は 24 個です．ついでに言うと，5 次の順列行列は 120 個，6 次の順列行列は 720 個あります．

	1 次	2 次	3 次	4 次	5 次	6 次	7 次	…
順列行列の個数	1	2	6	24	120	720	?	…

上の表をじっとながめると，勘の良い人は，1 個×2 次で 2 個，2 個×3 次で 6 個，6 個×4 次で 24 個，24×5 次で 120 個，120×6 次で 720 個，720×7 次で 5040 個という計算ができるかもしれませんね．つまり，n 次の順列行列の個数をp_nとすると，（n 次の順列行列の個数）＝n×（n－1 次の順列行列の個数）ですから，次の「再帰的に定義された式」つまり「漸化式」が成り立ちます．

$$p_n = np_{n-1}$$

n－1 次の前は n－2 次，その前は n－3 次…というぐあいに，3 次，2 次，1 次までさかのぼってゆくと，

$$p_{n-1} = (n-1)p_{n-2}$$
$$p_{n-2} = (n-2)p_{n-3}$$
$$\cdots$$
$$p_3 = 3p_2$$
$$p_2 = 2p_1$$

$p_1 = 1$ですので，これより，

$$p_n = n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

となります．
この右辺の n(n−1) (n－2)・…・3・2・1 はまとめて n!と書き，「n の階乗（かいじょう）」とよびます．
言いかえると，n 次の順列行列の個数は n!あります．

n 次の順列行列全体の集合を$\mathbb{P}_n$と書くことにすると，

$$\mathbb{P}_1 = \{(1)\}$$

$$\mathbb{P}_2 = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\mathbb{P}_3 = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

などになります.

さらに，集合$\mathbb{Q}$の元（要素）の個数を$\mathcal{S}(\mathbb{Q})$と書くことにすると，$\mathcal{S}(\mathbb{P}_1) = 1! = 1, \mathcal{S}(\mathbb{P}_2) = 2! = 2, \mathcal{S}(\mathbb{P}_3) = 3! = 6$であり，n 次の順列行列の個数つまり$\mathcal{S}(\mathbb{P}_n)$は n!です.

【定理 1】

$\mathcal{S}(\mathbb{P}_n)$=n!

なお, これから順列行列を書くとき, 1 がどこにあるかだけが大切なので, 0 を省略することがあります.
たとえば,

$$\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & 1\\ 1 & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & & \\ & & 1\\ & 1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & 1\\ 1 & & \\ & 1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & 1 & \\ & & 1\\ 1 & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

という具合です.

●数学の「行列」とは？

順列行列は，0 または 1 が正方形のかたちに並んでいます．0 または 1 に限らず，数字が正方形に並んでいるものを「正方行列」といいます．もっと一般的には，いくつかの数字を長方形のかたちに並べ，カッコでくくったものを「行列」といいます．行は横，列は縦に並んでいます．m×n 型の行列とは，行が m 行，列が n 列ある行列をいいます.

たとえば，$\begin{pmatrix}1 & -1 & \frac{1}{2}\\ 3 & \frac{1}{3} & 4\end{pmatrix}$ は行が 2 行，列が 3 列あるので 2×3 型の行列です.

行列のなかの数字を成分といいます.

次に，行列どうしの掛け算，つまり行列の積を説明しましょう.

順列行列に限らず，二つの正方行列の掛け算つまり積は，次のように約束します.

たとえば，3 次の行列 A=$\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}$と B=$\begin{pmatrix}d_1 & e_1 & f_1\\ d_2 & e_2 & f_2\\ d_3 & e_3 & f_3\end{pmatrix}$を掛けた AB は，3 次の行列になり,

$$\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_1 & e_1 & f_1\\ d_2 & e_2 & f_2\\ d_3 & e_3 & f_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3 & a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 & a_1f_1 + a_2f_2 + a_3f_3\\ b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3 & b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 & b_1f_1 + b_2f_2 + b_3f_3\\ c_1d_1 + c_2d_2 + c_3d_3 & c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3 & c_1f_1 + c_2f_2 + c_3f_3\end{pmatrix}$$

です．いっけん複雑なようですが，右辺の第 1 行第 1 列の成分だけを書き出すと，

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 & & \\ d_2 & & \\ d_3 & & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1d_1+a_2d_2+a_3d_3 & & \\ & & \end{pmatrix}$$

となっており，A の第 1 行の成分に B の第 1 列の成分をそれぞれ掛け，合計したものが積 AB の第 1 行第 1 列の成分です.

要するに「A の第 i 行の成分と B の第 j 列の成分を掛けて足しあわせたものが AB の第 i 行第 j 列の成分」になっています．この文章の i と j に，1,2,3 のどれかを入れて，ご自身で確かめてください.

正方行列でない一般の行列の積も定義できます.

A が m×n 型，B が n×k 型の行列のとき，AB の第 i 行第 j 列の成分は，上と同じように A の第 i 行の成分（n 列あるので n 個）と B の第 j 列の成分（n 行あるので n 個）をかけて足しあわせたものとします.

すると AB は m×k 型の行列になります．$a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{l=1}^{n}a_{il}b_{lj}$なので,

$$\mathrm{AB}=\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & b_{1j} & \\ & b_{2j} & \\ & \vdots & \\ & b_{nj} & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & & \vdots & \\ & & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \sum_{l=1}^{n}a_{il}b_{lj} & \cdots \\ & & \vdots & \end{pmatrix}$$

となります. 上の式で A は第 i 行だけ, B は第 j 列だけ, AB は第 i 行第 j 列の成分だけを書いてあります.

●順列行列の積

話を簡単にするために，ここからは順列行列だけで説明します.

3 次の順列行列$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$と$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$の積は,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\cdot1+1\cdot0+0\cdot0 & 0\cdot0+1\cdot0+0\cdot1 & 0\cdot0+1\cdot1+0\cdot0 \\ 0\cdot1+0\cdot0+1\cdot0 & 0\cdot0+0\cdot0+1\cdot1 & 0\cdot0+0\cdot1+1\cdot0 \\ 1\cdot1+0\cdot0+0\cdot0 & 1\cdot0+0\cdot0+0\cdot1 & 1\cdot0+0\cdot1+0\cdot0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

のように，掛け算の結果も 3 次の順列行列になります.

一般に 2 つの n 次の順列行列の積は，やはり n 次の順列行列になります.

この篇の最初に決めたように，n 次の順列行列全体の集合を$\mathbb{P}_n$と書くと，「順列行列 P が n 次の順列行列である」つまり「P が$\mathbb{P}_n$に含まれている」ことは，集合論の記号を使うと，P$\in\mathbb{P}_n$と書けます.

【定理 2】

$\mathrm{A},\mathrm{B}\in\mathbb{P}_n$であれば，$\mathrm{AB}\in\mathbb{P}_n$である.

この定理は「2 つの n 次の順列行列の積はやはり n 次の順列行列になる」ことをあらわしています.

どうして順列行列の積がまた順列行列になるのかは，じっくりと考えるとおわかりいただけるかと思います．順列行列の定義である，「各行各列の成分に 1 が 1 つだけあり，その他の成分がすべて 0」と，2 つの行列 A と B の積の定義である，「A の第 i 行の成分と B の第 j 列の成分を掛けて足し合わせたものが AB の第 i 行第 j 列の成分」がミソです．この【定理 2】はこれから何度も利用します.

ただし，このように 2 つの順列行列の積を考えるときは，掛ける順番が大切で，AB と BA が等しいとは限らないことを注意しておきます.

A と B が順列行列であれば，AB，BA とも（たとえ AB$\neq$ BA であっても）どちらも順列行列になります．また，面倒なので証明は省きますが，積に関して，いわゆる結合法則 A(BC)=(AB)C が成り立ち，これを ABC と書きます．
順列行列 A の p 個の積をA^pと書きます．AA⋯A=A^p です．これを「A の p 乗」とよびます．
順列行列は，【定理 2】より何回掛けても順列行列ですから， 次の定理が成り立ちます．

【定理 3】
A$\in \mathbb{P}_n$であれば，$A^p \in \mathbb{P}_n$である．

【定理 2】【定理 3】とも，集合論の記号「∈」を使っているので，文章が短くなっています．
念のためにもう一度言っておくと，$\mathbb{P}_n$は n 次の順列行列全体の集合をあらわしています．

●よく知られている順列行列のおもな性質

この項も，話を簡単にするために順列行列に限って説明します．
何も書いていない成分は 0 だと思ってください．

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

のように，右下がりの対角線上の成分だけが 1 で，その他が 0 の順列行列を単位行列といいます．（各行各列に 1 が一つだけですので，順列行列です）．n 次の単位行列を$E_{(n)}$と書きます．例をあげると，

$$E_{(2)}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{(3)}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

です．なお，これからは，単位行列の次数(n)を省略し，$E_{(n)}$を E と書くことがあるので，ご了承ください．式にあらわれる順列行列の次数が一定のときは，単位行列を E と書きます．
単位行列 E には，どんな行列 A を左から掛けても右から掛けても，結果はその行列 A のまま，という性質があります．つまり，

AE=EA=A

です．算数の掛け算で，どんな数に 1 を掛けても，結果はその数のまま，ということに似ています．1 を掛けるときとよく似ているので，E は単位行列とよばれています．実際，3 次の場合，

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

です．この式は，a_1〜c_3がどんな数であっても成り立っています．
ここで，順列行列 A の行と列の成分を入れ替えた行列を A の転置行列とよび，行列 A の右肩に T をつけて，A^Tと書くことにします．
行と列を入れ替えることは，行列の左上と右下を結ぶ対角線を軸として 180 度回転することと同じですから，対角線を軸として対称な順列行列では，A^Tが元の行列 A と同じになります．

たとえば，3 次の順列行列では，

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

の 4 個は，対角線を軸として対称（このような行列を対称な順列行列といいます）ですから，転置行列A^{T}は元の行列 A に等しくなります．一方，

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

の 2 個は，相互に転置行列になっています．すなわち，

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

になっています. 元の行列の第 1 行が転置行列の第 1 列になり, 元の行列の第 2 行が転置行列の第 2 列, 元の行列の第 3 行が転置行列の第 3 列になっていることを確かめてください.

もちろん転置行列も, 各行各列に一つだけ 1 があり, その他の成分は全部 0 の順列行列になっています.

順列行列の場合，これからの話に非常に好都合なことに，元の行列と転置行列の積は単位行列になります．この積は掛ける順番に関係なく，単位行列 E になります.

$$\mathrm{AA}^{\mathrm{T}}=\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}=\mathrm{E}$$

このように，元の行列 A に掛けると単位行列になるような行列を，逆行列と呼び，A^{-1}と書きます．A^{-1}は「エー・インバース」と読みます.

一般の正方行列の場合，必ずしも逆行列が存在するとは限りません（たとえば，すべての成分が 0 の正方行列には逆行列が存在しません）が，順列行列の場合は必ず転置行列が逆行列になります.

【定理 4】
$\mathrm{A}\in\mathbb{P}_n$のとき，$\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\in\mathbb{P}_n$であり，$\mathrm{A}^{\mathrm{T}}=\mathrm{A}^{-1}$つまり $\mathrm{AA}^{\mathrm{T}}=\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}=\mathrm{E}$である.

なお，逆行列に関しては，一般の行列 A,B に対して，「積 AB の逆行列$(\mathrm{AB})^{-1}$は B の逆行列B^{-1}と A の逆行列A^{-1}の積$\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$になる」つまり

$$(\mathrm{AB})^{-1}=\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$$

が言えます．なぜなら，$\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$と AB の積を作ってやると，結合法則が成り立つので，

$$(\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1})(\mathrm{AB})=\mathrm{B}^{-1}(\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A})\mathrm{B}=\mathrm{B}^{-1}(\mathrm{E})\mathrm{B}=\mathrm{B}^{-1}(\mathrm{EB})=\mathrm{B}^{-1}\mathrm{B}=\mathrm{E}$$

と，$\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$が AB の逆行列である，つまり$(\mathrm{AB})^{-1}=\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$が言えます．（AB と$\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$の積も同様）

このことを A のべき乗に繰り返して使うと，

【定理 5】
行列 A に逆行列が存在するとき，$(\mathrm{A}^{p})^{-1}=(\mathrm{A}^{-1})^{p}$である.

が成り立ちます.

この【定理 5】の両辺をA^{-p}と書きます．こう書いても良い理由は、説明がくどくなるので省略します.

以上の【定理 1】～【定理 5】は，大学生用の「線型代数（線形代数とも書く）」の一部の教科書に証明

抜きで載っています．順列行列の説明を載せていない教科書もあります．
すこし高度な「線型代数」の教科書には，「$\mathbb{P}_n$は群である」という次の定理が載っています．

【定理 6】
n 次の順列行列全体の集合$\mathbb{P}_n$は，行列の積に関して「群（ぐん）」である．すなわち
①任意の A,B∈ $\mathbb{P}_n$に対して，AB∈ $\mathbb{P}_n$ （積に関して閉じている）
②任意の $\mathrm{A,B,C} \in \mathbb{P}_n$に対して，(AB)C=A(BC)（結合法則の成立）
③任意の A∈ $\mathbb{P}_n$に対して，単位行列 E は AE=EA=A（単位元の存在）
④任意の A∈ $\mathbb{P}_n$に対して，転置行列A^{T}（$\in \mathbb{P}_n$）は $\mathrm{AA}^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A} = \mathrm{E}$（逆元の存在）

【定理 6】の群の定義①～④は，のちほど利用しますので，ちょっとマーク（注意）しておいてください．
なお，もっと高度な「線型代数」の一部の教科書には，
〇順列行列の行列式の値は，1，－1 のどちらかである．
〇対称な順列行列の固有値は，複素数ではなく実数（重複を無視すると 1 か－1）である．
などが書いてありますが，私にはここで「行列式」や「固有値」を説明する心の余裕はありませんので，省略させていただきます．
以上が，これまでに知られている順列行列の主な性質です．
ここからは，これまでにあまり知られていない（と思われる）順列行列の性質を述べてみましょう．

●なぜ順列行列とよぶのか

そもそも順列行列とよばれる所以（ゆえん）は，順列行列が「順列」を生み出すからです．
順列とは，たとえば，1 から 5 までの数字からできている，自然な並び(1,2,3,4,5)を，(1,2,4,5,3)のように「並べ替えたもの」をいいます. 並び方だけを問題にするので, (1,2,3,4,5)や(1,2,4,5,3)は, (12345),(12453)という 1 行 5 列つまり 1×5 型の行列と考えてもかまいません．すると 5 次の順列行列

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

との積を考え,

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&4&5&3\end{pmatrix}$$

という式ができます．逆に(12453)に右から 5 次の順列行列 A の転置行列A^{T}を掛けてやると,

$$\begin{pmatrix}1&2&4&5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&2&4&5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\end{pmatrix}$$

と元の(12345)になり，(12453)という順列と 5 次の順列行列 A が 1 対 1 に対応していることがわかります．これが順列行列とよばれる理由なのです.
この 5 次の順列行列 A は，「０．はじめに」で述べたように，「烽火連三月(12345)」という 5 字の漢字に掛けることで，「烽火連$_{\text{二}}$三月$_{\text{一}}$」と返り点（一二点）をつけて並べ替えた「烽火三月連(12453)」を生み出します.
賢明なみなさまは,「家書抵萬金(12345)」に A を掛けても,「家書抵$_{\text{二}}$萬金$_{\text{一}}$」すなわち「家書萬金抵(12453)」になることにお気づきでしょう．つまり 5 次の順列行列 A は，漢字やその漢字の意味とは無関係に，「○○○$_{\text{二}}$○○$_{\text{一}}$」という「返り点の付け方」をあらわしています.
なお，本によっては，順列を置換とよび，順列行列を置換行列と書いているものもあります．どちらかと言えば，置換や置換行列と書いてある本のほうが古いような気がします.

●対称な順列行列がつくる群

【定理 6】で「n 次の順列行列全体の集合$\mathbb{P}_n$は，行列の積に関して群である」と述べましたが，実は$\mathbb{P}_n$の一部つまり部分集合だけで行列の積に関して群になっているものがあります.
いちばん簡単な（数学では自明といいます）$\mathbb{P}_n$の部分集合の群（部分群といいます）は,

$\{\mathrm{E}\}$

という単位行列 E だけの集合です．これは EE=E ですので，群の 4 つの条件，①集合内で閉じている，②結合法則の成立，③単位元の存在，④逆元の存在（$\mathrm{E}^{-1}=\mathrm{E}$です．なぜなら EE=E だから）を満たしています.
単位行列 E と（対角線を軸として）対称な順列行列 S との 2 つの行列からできている集合,

$\{\mathrm{E}, \mathrm{S}\}$

も群になります．というのも，どんな順列行列でも転置行列は逆行列（$\mathrm{A}\in\mathbb{P}_n$ならば$\mathrm{A}^{-1}=\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$）であり，対称な順列行列 S の場合は行と列を入れ替えた転置行列S^{T}も S と同じ（$\mathrm{S}^{-1}=\mathrm{S}^{\mathrm{T}}=\mathrm{S}$）だからです．つまり集合$\{\mathrm{E},\ \mathrm{S}\}$は，①行列の積に関して閉じており（$\mathrm{S}^2=\mathrm{S}\mathrm{S}^{\mathrm{T}}=\mathrm{S}\mathrm{S}^{-1}=\mathrm{E}$ です），②結合法則も成り立ち，③単位元 E が存在し，④逆元が存在しているので群になります.
というわけで，n 次の順列行列全体の集合$\mathbb{P}_n$には，対称な順列行列の個数だけ，$\{\mathrm{E}, \mathrm{S}\}$という部分群がありますが，さて，この n 次の対称な順列行列はいったいいくつあるでしょうか？
実際に数えてゆくと,

$\mathbb{P}_1$では，(1)の 1 個,

$\mathbb{P}_2$では，$\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} & 1\\ 1 & \end{pmatrix}$とも対称で 2 個,

$\mathbb{P}_3$では，$\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & & \\ & & 1\\ & 1 & \end{pmatrix},\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$の 4 個,

$\mathbb{P}_4$では，$\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & & 1\\ & & 1 & \end{pmatrix},\begin{pmatrix} & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & & 1\\ & & 1 & \end{pmatrix},\begin{pmatrix} & & & 1\\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$など 10 個

の対称な順列行列があります.

この篇の最初の【定理 1】述べたように，4 次の順列行列全体の集合$\mathbb{P}_4$の元（要素）の個数$\mathcal{S}(\mathbb{P}_4) = p_4$は4!=24 個なので，半分以下の 10 個が対称です.
5 次の場合，$p_5 = 5! = 120$個ですので，わたしはノートに全部書き出して数えてみました．すると

$$\mathbb{P}_5\text{では，}\begin{pmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&&&1&\\&&1&&\\&&&&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}&&1&&\\&1&&&\\1&&&&\\&&&&1\\&&&1&\end{pmatrix},\begin{pmatrix}&&1&&\\&&&&1\\1&&&&\\&&&1&\\&1&&&\end{pmatrix}\text{など 26 個}$$

あることがわかりました．120 個を全部書き出すのに，かなり時間がかかりましたが，対称なものを拾い出すのは数分でできました.
それでですね，いったい n 次の対称な順列行列の個数s_nはどうなるのか？
いちおう次のような「再帰的に定義された式」つまり「漸化式」は思いつきましたので，皆さん，証明なり反例なりを考えてみてください.

【予想 1】 $s_1 = 1, s_2 = 2$　かつ　$s_n = s_{n-1} + (n-1)s_{n-2}$　$(n \geq 3)$

この予想は，$s_3 = 4, s_4 = 10, s_5 = 26$まではピッタリとあてはまりますが，$s_6$以上は確かめていません.
もちろん，一般項s_nがどうなるか，わかりません．対称な順列行列の個数なんて，私にとっては難しい問題ですが，皆さんにとっては大した問題ではないと思うので，是非チャレンジしてください.

●順列行列を何乗かすると

次に，「どんな順列行列でも何乗かすると単位行列になる」という定理を思いついたので，それを証明しましょう．この定理と漢文訓読との関係は，まだ不明ですので，余談のつもりでお読みください.
n 次の順列行列が n 次の順列に対応している（漢字で言うと，n 字の語順変換に対応している）ことから，「どんな n 次の順列行列でも，多くても n 乗すれば，単位行列になる」「そんなの当り前やんか」と考えられた方もおられるかもしれません．和算（江戸時代の数学）研究の大家である小寺裕先生も，「n 乗すると単位行列になるのは，当り前のような気がする」と最初は言っていました．たしかに，$\mathbb{P}_2$，$\mathbb{P}_3$，$\mathbb{P}_4$では，高々（多くても，という意味です）2 乗，3 乗，4 乗すると，単位行列になります.
たとえば，

$$\mathbb{P}_2\text{では，}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}_3\text{では，}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}_4\text{では，}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

が成り立ちます．$\mathbb{P}_3$（6 個）は手計算でやりましたが，さすがの私も$\mathbb{P}_4$（24 個）の 4 乗の計算は数学ソフトの Maple（メイプル）でやりました．数学ソフトでも，4 次の行列を入力するのに，けっこう時間が

かかります.
それはさておき，$\mathbb{P}_5$つまり 5 次の順列行列になると，ドラマティックなことが起こります．たとえば，

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}\text{は,}$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}^5=\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}^6=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

と，6 乗しないと単位行列になりません！
6 乗しないと単位行列にならない 5 次の順列行列は，この例を含めて全部で 20 個あります.
このような例は，和算にも現代数学にも詳しい田村三郎先生（号は屯候（とんこう））がご存じなかったので，たぶん，どなたもご存じなかったことだと思います．なにぶん数学ソフトでも入力に時間がかかるのですから.
「n 次の順列行列には n 乗しないと単位行列にならないものがある」ことは，次の例から明らかです.

【定理 7】

n 次の順列行列　$P=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\\vdots&\ddots&1&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&0\\0&\ddots&\ddots&\ddots&1\\1&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$　は n 乗しないと単位行列にならない.

証明．順にべき乗をつくっていくと$\mathrm{P^n}=\mathrm{E}$がいえる．（厳密には数学的帰納法でやります）

$$\mathrm{P}^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & & O\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{P}^3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & O\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1\\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 1 & 0 & O\end{pmatrix}$$

$\vdots$　　　　　$\vdots$

$$\mathrm{P}^{\mathrm{n}-1}=\begin{pmatrix}0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\\ 1 & \ddots & & & 0\\ & \ddots & \ddots & & \vdots\\ & & \ddots & \ddots & \vdots\\ O & & & 1 & 0\end{pmatrix}\text{より}$$

$$\mathrm{P^n}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & \ddots & O & \\ & & \ddots & \\ & O & & \ddots & \\ & & & & 1\end{pmatrix}$$　　（Oは成分がすべて 0 であることを示す）

この【定理 7】は，「線型代数」の教科書の練習問題にあるので，点線で囲みました．
では，はじめに予告した「どんな順列行列でも何乗かすると単位行列になる」という定理を証明します．

【定理 8】
任意の $\mathrm{P}\in\mathbb{P}_n$には，$\mathrm{P}^k=\mathrm{E}$となる自然数 kが存在する．

今までながながと書いてきましたが，やっと自力で思いついた（正確には，高校の同級生である大阪電通大の坂田定久教授に相談しました）ことを示す二重線で囲んだ定理が登場しました．
証明．
次のような集合$\mathbb{R}$を考える．

$$\mathbb{R}=\{\mathrm{P},\mathrm{P}^2,\cdots,\mathrm{P}^{n!},\mathrm{P}^{n!+1}\}$$

【定理 3】より$\mathbb{R}$の元（要素）はすべて$\mathbb{P}_n$の元である．つまり$\mathbb{R}\subseteq\mathbb{P}_n$（$\mathbb{R}$ は$\mathbb{P}_n$の部分集合）．$\mathbb{R}$は見かけ上，n!+1 個の元をもつが，【定理 1】より$\mathbb{P}_n$の元（要素）の個数は，$\mathcal{S}(\mathbb{P}_n)$=n!であるので，$\mathbb{R}$の元のうち，少なくとも 1 組は等しい元があるはずである．その 1 組を$\mathrm{P}^i=\mathrm{P}^j\ (i>j)$とする．

$$\mathrm{P}^{i-j}=\mathrm{P}^i\mathrm{P}^{-j}=\mathrm{P}^i\left(\mathrm{P}^j\right)^{-1}=\mathrm{P}^i\left(\mathrm{P}^i\right)^{-1}=\mathrm{E}$$

であるので，$k=i-j$とおけば，$\mathrm{P}^k=\mathrm{E}$となる自然数 kが存在することが言えた．（証明終）
少なくとも 1 つ$\mathrm{P}^k=\mathrm{E}$となる自然数 k が存在することが言えたので，これからはそのうちの最小のものを kとして議論を進めます．
【定理 7】と【定理 8】を合体すると，「どんな n 次の順列行列でも n 乗以上，n!乗以下で単位行列になる」ことが言えます．前頁で述べたように 5 次の場合，20 個の順列行列が 6 乗で単位行列になります．7 乗以上しなければならない 5 次の順列行列はありません．

ではいったい，n 次の順列行列は何乗すると必ず単位行列になるでしょうか？
この疑問に答える例として 7 次の場合の面白い定理をご紹介しておきます.

【定理 9】
7 次の順列行列には 12 乗しないと単位行列にならないものがある.

この定理は，わかりやすいように普通の文章にしており，数学の言葉では書きませんでした.
証明は，のちほど「ブロック行列」の考え方を使って，7 次に限らないで，一般的な n 次のケースでおこないます.
実際に手計算か数学ソフトで試してみよう，という方のために，12 乗すると単位行列になる 7 次の順列行列を一つだけ書いておきます.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

この 7 次の順列行列は 12 乗しないと単位行列になりません.

●べき乗から生まれる巡回群

【定理 6】で n 次の順列行列の集合$\mathbb{P}_n$が群になることを言い，そのついでに単位行列 E と対称な順列行列 S の和集合（あわせた集合という意味です）$\{\mathrm{E},\mathrm{S}\}$も$\mathbb{P}_n$の部分群になることを言いました.
ある順列行列 A が k 乗（上に述べたように，$\mathrm{A}^k = \mathrm{E}$となる k のうち最小のもの）で単位行列 E になるとすると，次の集合$\mathbb{K}_\mathrm{A}$も$\mathbb{P}_n$の部分群になります.

$$\mathbb{K}_\mathrm{A} = \{\mathrm{E}, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2, \cdots, \mathrm{A}^{k-1}\}$$

この$\mathbb{K}_\mathrm{A}$は，これまで何度も述べてきたようにすべての元が順列行列になり，行列の積に関して①閉じています．たとえばA^3とA^{k-1}との積は，

$$\mathrm{A}^3\mathrm{A}^{k-1} = \mathrm{A}^{k+2} = \mathrm{A}^k\mathrm{A}^2 = \mathrm{E}\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}^2$$

となり，やはり$\mathbb{K}_\mathrm{A}$の元になります.
②結合法則が成り立つのは, 順列行列どうしの積ですから当然のことで, ③単位元は E, ④逆元の存在は, $\mathrm{A}^p \in \mathbb{K}_\mathrm{A}\ \ (1 \le \mathrm{p} \le \mathrm{k})$に対して，$\mathrm{A}^{k-p}$ が

$$\mathrm{A}^p\mathrm{A}^{k-p} = \mathrm{A}^{k-p}\mathrm{A}^p = \mathrm{A}^k = \mathrm{E}$$

と逆元になります.
この$\mathbb{K}_\mathrm{A}$を「A を生成元とする巡回群」といいます.
4 次の場合の例を示すと,

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

は,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる，$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$を生成元とする巡回群です．もちろん，

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

です．元の個数が有限な群（有限群といいます）の場合，その元の個数を「群の位数（いすう）」とよびます．$\mathbb{P}_4$の部分群には，上の例のような位数 4 の巡回群が 3 つ，位数 3 の巡回群が 4 つ，位数 2 つまり 4 次の対称な順列行列から生まれる巡回群が 9 つ，それに（対称な順列行列である）単位行列 E 単独の位数 1 の巡回群が 1 つ存在します．
巡回群のなかには，部分群をもつものがあります．上の位数 4 の巡回群には，

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

という（対称な順列行列を生成元とする）位数 2 の部分群があります．
それで，かなり高度な「線型代数」の教科書には，
○（E だけの自明な群を除いて）部分群をもたない巡回群の位数は素数である
という定理が載っています．証明は省略しますが，ここまで読み進まれた皆さんには「位数が素因数分解できるなら，部分群がある」ことは，なんとなくイメージできるのではないか，と推察いたします．
「n 次の順列行列は何乗かすると単位行列になる」という【定理 8】から派生して，巡回群の話を延々としてしまいました．巡回群のことは，この「漢文訓読と順列行列のお話」では余談のつもりで書きましたが，私のまだ気づいていないところで案外，深く関係しているのかもしれません．巡回群の話の最後に，情報理論に関心のある方に向け，一つだけ私が思いついたことを書いておきます．それは，$\mathrm{A}^k = \mathrm{E}$ は

$$\log_{\mathrm{A}} \mathrm{E} = \frac{1}{\log_{\mathrm{E}} \mathrm{A}} = k$$

と書きなおせる，ということです．
これ以上のことは全然考えていないので，続きは皆さんで考えてください．
では，いよいよ本論を始めます．

●ブロック行列の直和

初めにお断りしますが，これまでは，行列には長方形（正方行列では正方形）に並んだ成分を包んでい

るカッコを付けていましたが，これからはカッコをとっぱらった成分だけのものと元のカッコつきのものを同一視します．
n 次順列行列 A と m 次順列行列 B を次のように対角線上に並べ，他の成分が全部 0 の行列を「A と B の直和（ちょくわ）」とよび，$\mathrm{A} \oplus \mathrm{B}$と書きます．

$$\mathrm{A} \oplus \mathrm{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{O}_1 \\ \mathrm{O}_2 & \mathrm{B} \end{pmatrix}$$

ここで，O_1は n 行 m 列の n×m 型で成分がすべて 0 の行列，O_2は m 行 n 列の m×n 型で成分がすべて 0 の行列とします．成分が 0 のところを省略して，

$$\mathrm{A} \oplus \mathrm{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \\ & \mathrm{B} \end{pmatrix}$$

としても同じことです．
この$\mathrm{A} \oplus \mathrm{B}$が n＋m 次の行列になっていることはすぐにわかりますね．
しかも，これからの議論に非常に好都合なことに，A も B も各行各列に 1 が一つだけある順列行列ですから，$\mathrm{A} \oplus \mathrm{B}$も各行各列に 1 が一つだけある順列行列になっています．
順列行列$\mathrm{A} \oplus \mathrm{B}$に対して，順列行列 A と B を「ブロック行列」といいます．

【定理 10】
$\mathrm{A}, \mathrm{C} \in \mathbb{P}_n$と $\mathrm{B}, \mathrm{D} \in \mathbb{P}_m$をブロック行列とする，2 つの直和$\mathrm{A} \oplus \mathrm{B}, \mathrm{C} \oplus \mathrm{D}$の積は，
積 AB，積 CD の直和$\mathrm{AC} \oplus \mathrm{BD} \quad (\in \mathbb{P}_{n+m})$になる．

この定理は式で書いたほうがわかりやすいでしょう．

$$(\mathrm{A} \oplus \mathrm{B})(\mathrm{C} \oplus \mathrm{D}) = (\mathrm{AC} \oplus \mathrm{BD})$$

つまり，

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \\ & \mathrm{B} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{C} & \\ & \mathrm{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{AC} & \\ & \mathrm{BD} \end{pmatrix}$$

が成り立つ，ということです．証明は，$(\mathrm{A} \oplus \mathrm{B})(\mathrm{C} \oplus \mathrm{D})$の第 i 行第 j 列$(1 \leq \mathrm{i}, \mathrm{j} \leq \mathrm{n})$の成分は A の第 i 行の n 個の成分と C の第 j 列の n 個の成分を掛けて足し合わせたものだから、…という調子で簡単にできます．
この【定理 10】は正直なところオリジナルとは言い難い（一般の行列で証明している本がある）ものですが，順列行列にかぎっているのは，それなりにオリジナリティがあると思っています．
この定理は，すぐにべき乗に拡張できます．

【定理 11】
$\mathrm{A} \in \mathbb{P}_n$と $\mathrm{B} \in \mathbb{P}_m$をブロック行列とする直和$\mathrm{A} \oplus \mathrm{B} \quad (\in \mathbb{P}_{n+m})$の p 乗は，
A の p 乗と B の p 乗の直和$\mathrm{A}^p \oplus \mathrm{B}^p \quad (\in \mathbb{P}_{n+m})$になる．

つまり，

$$(\mathrm{A} \oplus \mathrm{B})^p = \mathrm{A}^p \oplus \mathrm{B}^p$$

つまり，

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \\ & \mathrm{B} \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} \mathrm{A}^p & \\ & \mathrm{B}^p \end{pmatrix}$$

この定理から，前にのべた【定理 9】の「7 次の順列行列には 12 乗しないと単位行列にならないものがある」が証明できます.

というのも，$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$は 4 乗しないと単位行列になりませんし，$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$は 3 乗しないと単位行列にならないので，A と B の直和$\mathrm{A} \oplus \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$は，4 乗と 3 乗の最小公倍数の 12 乗しないと，7 次の単位行列になりません.

これを一般化すると，次の【定理 12】が成り立ちます.

この【定理 12】が 2011 年秋に考えたことの一つの到達点です.

【定理 12】

P$\in \mathbb{P}_n$がブロック行列 A$\in \mathbb{P}_i$と B$\in \mathbb{P}_j$ $(i + j = n)$の直和であり，

A を単位行列するために q 乗，B を単位行列にするために r 乗を要するとき，

P を単位行列にするためには，q と r の最小公倍数のべき乗を要する.

前に順列行列 A を生成元とする巡回群$\mathbb{K}_\mathrm{A} = \{\mathrm{E}, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2, \cdots, \mathrm{A}^{k-1}\}$（位数（個数）は k）の説明をしましたが，この定理は，「$\mathbb{K}_\mathrm{A}$の位数と$\mathbb{K}_\mathrm{B}$の位数の最小公倍数が$\mathbb{K}_\mathrm{P}$の位数である」とシンプルに言いかえることができます.

とはいうものの，たとえば 7 次の順列行列を単位行列にするには 12 乗で十分かどうかは，まだ証明していません．言いかえると，この【定理 12】は「n 次の順列行列を単位行列にするには何乗を要するか」という問題に対する，ごくごく限定したケースの，いわゆる必要条件を示しただけで，十分条件にはなっていません.

5 次までは，数学ソフト Maple（メイプル）を使って，全数調査をおこないました．5 次の場合，【定理 12】の q=3，r=2 の最小公倍数 6 で，直和に分解できない場合も「まかなえ」ます.

6 次はまだ手つかずです．いったい何乗で単位行列になるのやら．4 次の場合の 4 乗と同じように，6 乗で済むのかもしれません．6 次の順列行列は 720 個あります．時間をかければ全数調査ができないこともないでしょう．どなたか挑戦しませんか？全数調査は，もう数学ではなく工学のジャンルですが….

とりあえず，次の予想をたてておきます.

【予想 2】

n 次の順列行列を単位行列にする，べき乗は n!よりはうんと小さい.

せいぜい 2n か 3n ぐらいである.

なお，直和に関しては，屯候田村三郎先生が発見された，次の重要な関係式が成り立ちます.

【定理 13】（屯候）

$\mathrm{A} \in \mathbb{P}_n$，$\mathrm{B} \in \mathbb{P}_m$に関して，$\mathrm{A} \oplus \mathrm{B} = (\mathrm{A} \oplus \mathrm{E}_{(m)})(\mathrm{E}_{(n)} \oplus \mathrm{B})$

証明は簡単ですが，未発表の関係式なので，「よく知られている定理」として点線で囲むのは，しのびなく，二重線で囲んでおきました.
それと，次の重要な定理も屯候先生の指摘です.

【定理 14】（屯候）
$A \in \mathbb{P}_n$，$B \in \mathbb{P}_m$のとき，$A \oplus B$の全体の集合$\{A \oplus B\}$も行列の積に関して群となる.
単位元は$E_{(n)} \oplus E_{(m)}$，$A \oplus B$の逆元は$(A \oplus B)^T = A^T \oplus B^T$　である.
群$\{A \oplus B\}$の位数（個数）は n!m!である.

定理のなかにほとんど証明も含まれているので，説明の必要はないと思います.
【定理 13】の式の右辺にある$A \oplus E_{(m)}$（$A \in \mathbb{P}_n$）の全体の集合$\widetilde{\mathbb{P}_n}$は，【定理 14】で B を$E_{(m)}$に固定した場合ですので，位数 n!の群になります．群$\widetilde{\mathbb{P}_n}$ =$\{ A \oplus E_{(m)}\}$は群$\mathbb{P}_n$ =$\{A\}$と 1 対 1 に対応（これを$\widetilde{\mathbb{P}_n}$と$\mathbb{P}_n$は同型といい，$\widetilde{\mathbb{P}_n} \cong \mathbb{P}_n$と書きます）しています．同様に$E_{(n)} \oplus B$ $(B \in \mathbb{P}_m)$に関して，群$\widetilde{\mathbb{P}_m} = \{E_{(n)} \oplus B\}$も$\mathbb{P}_m$と 1 対 1 に対応しています．つまり$\widetilde{\mathbb{P}_m} \cong \mathbb{P}_m$です.
よって, $A \oplus B$の全体の集合$\{A \oplus B\}$すなわち$\{(A \oplus E_{(m)})(E_{(n)} \oplus B)\}$がつくる群は$\widetilde{\mathbb{P}_n}\widetilde{\mathbb{P}_m}$と書くことができます.
巡回群に関する【定理 12】にもどると，「$\mathbb{K}_A$の位数と$\mathbb{K}_B$の位数の最小公倍数が$\mathbb{K}_{A\oplus B}$の位数である」になります．これが 2012 年 1 月現在の到達点です.

●逆和を逆順行列で変換する

次に，n 次の順列行列 A と m 次の順列行列 B との「逆和」という概念を導入します.
これは,

$$A \ominus B = \begin{pmatrix} & B \\ A & \end{pmatrix}$$

という n＋m 次の順列行列です．順列行列 A と順列行列 B の逆和$A \ominus B$が順列行列になるわけは，A と B の直和

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}$$

が順列行列になるのと同じように説明できます.
ここで，m 次の順列行列で逆対角線上の成分がすべて 1 の順列行列$I_{(m)}$を考えます.

$$I_{(m)} = \begin{pmatrix} O & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ & 1 & & \\ 1 & & & O \end{pmatrix}$$

$I_{(m)}$を「逆順行列」とよびます．命名者は屯候（とんこう）田村三郎先生です．次数がわかりきっているときは，単位行列$E_{(m)}$を E と略記するように，$I_{(m)}$を I と略記します．I と I の積,

II=E

は明らかです.

屯候先生からもらったメモにもとづいて，わたしなりに言いかえた，直和と逆和に関する定理をいくつかご紹介しましょう．

【定理 15】（屯候）
$A, C \in \mathbb{P}_n$，$B, D \in \mathbb{P}_m$のとき，次の式が成り立つ．
①$(A \ominus B)I_{(n+m)} = BI_{(m)} \oplus AI_{(n)}$
②$(A \ominus B)I_{(n+m)}(C \ominus D)I_{(n+m)} = BI_{(m)}DI_{(m)} \oplus AI_{(n)}CI_{(n)}$
③$(A \ominus B)I_{(n+m)} = (BI_{(m)} \oplus E_{(n)})(E_{(m)} \oplus AI_{(n)})$

なにやら難しそうですが，定義にもとづいて行列で書くと，簡単に成り立つことがわかります．
①は，

$$(A \ominus B)I_{(n+m)} = \begin{pmatrix} & B \\ A & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & I_{(n)} \\ I_{(m)} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BI_{(m)} & \\ & AI_{(n)} \end{pmatrix} = BI_{(m)} \oplus AI_{(n)}$$

②は，①を使って，

$$(A \ominus B)I_{(n+m)}(C \ominus D)I_{(n+m)} = \begin{pmatrix} BI_{(m)} & \\ & AI_{(n)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} DI_{(m)} & \\ & CI_{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BI_{(m)}DI_{(m)} & \\ & AI_{(n)}CI_{(n)} \end{pmatrix}$$

③は，

$$(A \ominus B)I_{(n+m)} = \begin{pmatrix} BI_{(m)} & \\ & AI_{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BI_{(m)} & \\ & E_{(n)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{(m)} & \\ & AI_{(n)} \end{pmatrix} = (BI_{(m)} \oplus E_{(n)})(E_{(m)} \oplus AI_{(n)})$$

と証明できます．
この定理は，要するに，「逆和を考えるときは，逆順行列 I を右から掛けてやれば，直和に変形できる」ということを主張しています．
さて，ここからは，逆和$A \ominus B$の B のかわりに m 次の単位行列$E_{(m)}$（これまで同様 E だけで代用）を使った，

$$A \ominus E = \begin{pmatrix} & E \\ A & \end{pmatrix}$$

を考察の対象にします．むろん，n 次の順列行列 A と m 次の単位行列 E の逆和$A \ominus E$も n＋m 次の順列行列です．
【定理 15】の①から，$A \in \mathbb{P}_n$に対して，

$$(A \ominus E_{(m)})I_{(n+m)} = E_{(m)}I_{(m)} \oplus AI_{(n)} = I_{(m)} \oplus AI_{(n)}$$

となります．ここから，
【定理 14】の説明で使った，1 対 1 対応つまり群の同型の記号「≅」を利用すると，

群$\{(A \ominus E_{(m)})I_{(n+m)}\}$ ≅群$\{I_{(m)} \oplus AI_{(n)}\}$ ≅群$\{AI_{(n)}\}$ ≅群$\{A\}$つまり$\mathbb{P}_n$

が言えます．しかしまあ，$\{(A \ominus E_{(m)})I_{(n+m)}\}$と$\{A\}$つまり$\mathbb{P}_n$とが同型，というのは，見るからに当り前のことで，べつだん定理として取り上げるほどのことではありません．
余談ですが，「直和」という言い方は数学にありますが，「逆和」という言い方は私が考えました．「直差」にしたほうが良かったかもしれません．そういえば，計量国語学会で発表したときのレジュメには，直和を対角配置，逆和（または直差）を逆対角配置と呼んでおりました．

●返読行列の再帰的定義

計量国語学会の話が出たところで，賢明なみなさまはすでにお気づきでしょう．
n 次と m 次の 2 つの順列行列の直和$A \oplus B$は，n 字と m 字の 2 つの漢字列の「連接」に対応し，n 次と m 次の 2 つの順列行列の逆和$A \ominus E$は，n 字と m 字の 2 つの漢字列の「返接」に対応しています．
いよいよ，この「２．不思議な順列行列の世界」も大詰めです．
数学としてちゃんとしておくために，まず n が自然数 N を動くときの$\mathbb{P}_n$の和集合$\mathbb{P}$を定義します．

$$\mathbb{P} = \bigcup_{i \in \mathrm{N}} \mathbb{P}_i$$

$\mathbb{P}$は，1 次から 2 次，3 次，…無限次元の順列行列全体の集合です．次数にかかわらず順列行列であれば，とにかく$\mathbb{P}$の元になっています．
この$\mathbb{P}$の真部分集合（$\mathbb{P}$よりも小さい$\mathbb{P}$の部分集合という意味です）の$\mathbb{H}$を次のように「再帰的に定義」します．
【集合$\mathbb{H}$の定義】
①1 次の順列行列(1)は$\mathbb{H}$の元である．
②順列行列 A, B が$\mathbb{H}$の元であれば，直和$A \oplus B$は$\mathbb{H}$の元である．
③E を任意の次元の単位行列とするとき，順列行列 C が$\mathbb{H}$の元であれば，逆和$C \ominus E$は$\mathbb{H}$の元である．
これで集合$\mathbb{H}$の定義はおしまいです．
集合$\mathbb{H}$に含まれる元を「返読行列」とよびます．計量国語学会のレジュメでは訓読行列とよんでいました．
「１．漢文訓読を数学にする」（または計量国語学会のレジュメ）を読んでいただくとわかりますが，返読行列は，「カッコつき表示」や「訓読の木」にちょうど対応しています．
さらに，$\mathbb{H}$の元のうち n 次の順列行列全体を$\mathbb{H}_n$と書くことにします．

$$\mathbb{H} = \bigcup_{i \in \mathrm{N}} \mathbb{H}_i$$

すると，$\mathbb{H}_n$の元の数$\mathcal{S}(\mathbb{H}_n)$は，n 字の漢字列が与えられたときに生じるカッコつき表示の総数a_nと一致します．つまり，訓読漸化式,

$$a_{n+1} = 3a_n + a_{n-1} + \sum_{i=2}^{n-2} a_i a_{n-i} \qquad (\mathrm{n} \geq 4)$$

が成り立ちます．
とくに，$\mathbb{H}$の定義の③の E を 1 次の単位行列(1)に変更した集合$\mathbb{H}^-$のうち n 次の順列行列全体の$\mathbb{H}_n^-$は，「n 字の漢字列が与えられたときに生じる竪点（たててん）のないカッコつき表示」に対応し，その総数$\mathcal{S}(\mathbb{H}_n^-) = b_n$は,

$$b_n = \sum_{i=0}^{n-1} b_i b_{n-i-1} \qquad (b_0 = 1)$$

という漸化式になり，母関数を利用して,

$$b_n = \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

が得られます．

かなり駆け足で，カッコつき表示や訓読の木との対応と，a_nとb_nの漸化式や一般項のことを述べてしまいましたが，いちおう発表済みのことなのでお許しください．

最後に，【定理 12】を言いかえた，「$\mathbb{K}_{\mathrm{A}}$の位数と$\mathbb{K}_{\mathrm{B}}$の位数の最小公倍数が$\mathbb{K}_{\mathrm{A}\oplus\mathrm{B}}$の位数である」という結論は，われながら$\mathbb{H}$ の構造や$\mathcal{S}(\mathbb{H})$に肉迫していると思いますが，真の解決にはほど遠いと感じています．とくに逆和がうまく扱えません．解決にほど遠いのは，ま，私の人生と似たようなものです．

（終）2018.11.9 微修正