

数理漢文学への道(2) 基本データ集

【記号法】

整数列 $\{a_n\}$ を $\{a(n)\}$ とも書く． $\{a(n)\}$ に対して $a(0 * n - 1) = a_0 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \dots + a_{n-1} a_0$ と書く．

以下のすべての漢文数列で $n=0$ および $n=1$ のときの値を 1 とする ($a(0) = a(1) = 1$)．

漢文数列は豎点 (たててん, ハイフン) の個数 m ($0 \leq m \leq n-2$) で分類する．再読を認めない数列を $\{k^m(n)\}$ とし, 再読を認める数列を $\{p^m(n)\}$ とする．とくに $\{k^0(n)\}$ を $\{c_n\}$, $\{k^{n-2}(n)\}$ を $\{k_n\}$, $\{p^0(n)\}$ を $\{d_n\}$, $\{p^{n-2}(n)\}$ を $\{p_n\}$ とも書く．

(追加)

$$\{k^4(n)\} \quad (n+1)k^4(n) = 3(n-1)k^4(n-1) + (5n-7)k^4(n-2) + 7(n-2)k^4(n-3) + (8n-19)k^4(n-4) + 9(n-2)k^4(n-5) + 2(n+4)k^4(n-6) - 2(2n-25)k^4(n-7) - 9(n-10)k^4(n-8) - 12(n-10)k^4(n-9) - (13n-134)k^4(n-10) - 10(n-11)k^4(n-11) - 6(n-12)k^4(n-12) - 3(n-13)k^4(n-13) - (n-14)k^4(n-14)$$

$$\{p^4(n)\} \quad 2(n+1)p^4(n) = (11n-7)p^4(n-1) + (7n-8)p^4(n-2) + 6(n-1)p^4(n-3) + 4(n+1)p^4(n-4) + 2(n+13)p^4(n-5) - 12(n-8)p^4(n-6) - 2(8n-67)p^4(n-7) - 18(n-9)p^4(n-8) - 6(3n-29)p^4(n-9) - 4(4n-41)p^4(n-10) + 10(n-11)p^4(n-11) - 6(n-12)p^4(n-12) - 3(n-13)p^4(n-13) - (n-14)p^4(n-14)$$

【定義】

$\{k^0(n)\}$	$k^0(n) = k^0(0 * n - 1)$
$\{k^1(n)\}$	$k^1(n) = k^1(0 * n - 1) + k^1(0 * n - 2) - k^1(n - 2)$
$\{k^2(n)\}$	$k^2(n) = k^2(0 * n - 1) + k^2(0 * n - 2) - k^2(n - 2) + k^2(0 * n - 3) - k^2(n - 3)$
$\{k^3(n)\}$	$k^3(n) = k^3(0 * n - 1) + k^3(0 * n - 2) - k^3(n - 2) + k^3(0 * n - 3) - k^3(n - 3) + k^3(0 * n - 4) - k^3(n - 4)$
$\{k^m(n)\}$	$k^m(n) = k^m(0 * n - 1) + k^m(0 * n - 2) - k^m(n - 2) + k^m(0 * n - 3) - k^m(n - 3) + \dots + k^m(0 * n - m - 1) - k^m(n - m - 1)$
$\{k_n\}$	$k_n = k(0 * n - 1) + k(0 * n - 2) - k_{n-2} + k(0 * n - 3) - k_{n-3} + \dots + k(0 * 1) - k_1 = k_{n-1} - k_{n-2} + k(0 * n - 1)$
$\{p^0(n)\}$	$p^0(n) = 2p^0(0 * n - 1) - p^0(n - 1)$
$\{p^1(n)\}$	$p^1(n) = 2p^1(0 * n - 1) - p^1(n - 1) + p^1(0 * n - 2) - p^1(n - 2)$
$\{p^2(n)\}$	$p^2(n) = 2p^2(0 * n - 1) - p^2(n - 1) + p^2(0 * n - 2) - p^2(n - 2) + p^2(0 * n - 3) - p^2(n - 3)$
$\{p^3(n)\}$	$p^3(n) = 2p^3(0 * n - 1) - p^3(n - 1) + p^3(0 * n - 2) - p^3(n - 2) + p^3(0 * n - 3) - p^3(n - 3) + p^3(0 * n - 4) - p^3(n - 4)$
$\{p^m(n)\}$	$p^m(n) = 2p^m(0 * n - 1) - p^m(n - 1) + p^m(0 * n - 2) - p^m(n - 2) + \dots + p^m(0 * n - m - 1) - p^m(n - m - 1)$
$\{p_n\}$	$p_n = 2p(0 * n - 1) - p_{n-1} + p(0 * n - 2) - p_{n-2} + \dots + p(0 * 1) - p_1 = 2p(0 * n - 1) - p(0 * n - 2)$

【母関数の関数方程式】

$\{k^0(n)\}$	$xK_0^2 - K_0 + 1 = 0$
$\{k^1(n)\}$	$x(1+x)K_1^2 - (1+x^2)K_1 + 1 = 0$
$\{k^2(n)\}$	$x(1+x+x^2)K_2^2 - (1+x^2+x^3)K_2 + 1 = 0$
$\{k^3(n)\}$	$x(1+x+x^2+x^3)K_3^2 - (1+x^2+x^3+x^4)K_3 + 1 = 0$
$\{k^m(n)\}$	$x(1+x+x^2+\dots+x^m)K_m^2 - (1+x^2+x^3+\dots+x^{m+1})K_m + 1 = \frac{x(1-x^{m+1})}{1-x}K_m^2 - \left(\frac{1-x^{m+2}}{1-x} - x\right)K_m + 1 = 0$
$\{k_n\}$	$xK^2 - (1-x+x^2)K + 1 - x = 0$
$\{p^0(n)\}$	$2xP_0^2 - (1+x)P_0 + 1 = 0$
$\{p^1(n)\}$	$x(2+x)P_1^2 - (1+x+x^2)P_1 + 1 = 0$
$\{p^2(n)\}$	$x(2+x+x^2)P_2^2 - (1+x+x^2+x^3)P_2 + 1 = 0$
$\{p^3(n)\}$	$x(2+x+x^2+x^3)P_3^2 - (1+x+x^2+x^3+x^4)P_3 + 1 = 0$
$\{p^m(n)\}$	$x(2+x+x^2+\dots+x^m)P_m^2 - (1+x+x^2+x^3+\dots+x^{m+1})P_m + 1 = x\left(1 + \frac{1-x^{m+2}}{1-x}\right)P_m^2 - \frac{1-x^{m+2}}{1-x}P_m + 1 = 0$
$\{p_n\}$	$x(2-x)P^2 - P + 1 - x = 0$

【1 階線形微分方程式】

$\{k^0(n)\}$	$(1 - 2x)K_0 + x(1 - 4x)K_0' - 1 = 0$
$\{k^1(n)\}$	$(1 - 6x^2 - 2x^3 - x^4)K_1 + x(1 - 3x - 6x^2 - 2x^3 + x^4 + x^5)K_1' - 1 - 2x + 3x^2 + 2x^3 = 0$
$\{k^2(n)\}$	$(1 - 3x^2 - 11x^3 - 6x^4 - 6x^5 - 2x^6)K_2 + x(1 - 3x - 5x^2 - 8x^3 - 3x^4 + x^5 + 4x^6 + 3x^7 + x^8)K_2' - 1 - 2x + 7x^3 + 5x^4 + 3x^5 = 0$
$\{k^3(n)\}$	$(1 - 3x - 3x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 42x^5 + 23x^6 + 30x^7 + 24x^8 + 9x^9)K_3$ $+ x(1 - 6x + 4x^2 + 8x^3 + 12x^4 + 24x^5 + 11x^6 - 10x^8 - 18x^9 - 15x^{10} - 8x^{11} - 3x^{12})K_3' - 1 + x + 6x^2 + 3x^3 + 3x^4 - 27x^5$ $- 20x^6 - 17x^7 - 12x^8 = 0$
$\{k_n\}$	$(1 - 3x + x^3 - x^4)K + x(1 - 6x + 7x^2 - 2x^3 + x^4)K' - 1 + x + 3x^2 - 2x^3 = 0$
$\{p^0(n)\}$	$(1 - 3x)P_0 + x(1 - 6x + x^2)P_0' - 2 + x = 0$
$\{p^1(n)\}$	$(2 - 4x - 9x^2 - 3x^3 - x^4)P_1 + x(2 - 11x - 8x^2 + 3x^3 + 4x^4 + x^5)P_1' - 2 + 6x^2 + 2x^3 = 0$
$\{p^2(n)\}$	$2(1 - 2x - 3x^2 - 8x^3 - 4x^4 - 3x^5 - x^6)P_2 + x(2 - 11x - 7x^2 - 7x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 7x^6 + 3x^7 + x^8)P_2' - 2 + 3x^2 + 11x^3 + 5x^4$ $+ 3x^5 = 0$
$\{p^3(n)\}$	$(2 - 4x - 6x^2 - 12x^3 - 25x^4 - 15x^5 - 13x^6 - 9x^7 - 3x^8)P_3$ $+ x(2 - 11x - 7x^2 - 6x^3 - 5x^4 + 8x^5 + 11x^6 + 12x^7 + 11x^8 + 6x^9 + 3x^{10} + x^{11})P_3' - 2 + 3x^2 + 7x^3 + 17x^4 + 9x^5 + 7x^6 + 4x^7$ $= 0$
$\{p_n\}$	$2(1 - 5x + 6x^2 - 4x^3 + x^4)P + x(2 - 17x + 32x^2 - 20x^3 + 4x^5)P' - 2 + 6x - 3x^2 = 0$

【1 階線形差分方程式】

$\{k^0(n)\}$	$(n+1)k^0(n) = 2(2n-1)k^0(n-1)$
$\{k^1(n)\}$	$(n+1)k^1(n) = 3(n-1)k^1(n-1) + 6(n-1)k^1(n-2) + 2(n-2)k^1(n-3) - (n-5)k^1(n-4) - (n-5)k^1(n-5)$
$\{k^2(n)\}$	$(n+1)k^2(n)$ $= 3(n-1)k^2(n-1) + (5n-7)k^2(n-2) + (8n-13)k^2(n-3) + 3(n-2)k^2(n-4) - (n-11)k^2(n-5) - 2(2n-13)k^2(n-6)$ $- 3(n-7)k^2(n-7) - (n-8)k^2(n-8)$
$\{k^3(n)\}$	$(n+1)k^3(n)$ $= 3(2n-1)k^3(n-1) - (4n-11)k^3(n-2) - 2(4n-11)k^3(n-3) - 3(4n-15)k^3(n-4) - 6(4n-13)k^3(n-5)$ $- (11n-43)k^3(n-6) - 30k^3(n-7) + 2(5n-52)k^3(n-8) + 9(2n-19)k^3(n-9) + 15(n-10)k^3(n-10)$ $+ 8(n-11)k^3(n-11) + 3(n-12)k^3(n-12)$
$\{k_n\}$	$(n+1)k_n = 3(2n-1)k_{n-1} - 7(n-2)k_{n-2} + (2n-7)k_{n-3} - (n-5)k_{n-4}$
$\{p^0(n)\}$	$(n+1)p^0(n) = 3(2n-1)p^0(n-1) - (n-2)p^0(n-2)$
$\{p^1(n)\}$	$2(n+1)p^1(n) = (11n-7)p^1(n-1) + (8n-7)p^1(n-2) - 3(n-4)p^1(n-3) - (4n-17)p^1(n-4) - (n-5)p^1(n-5)$
$\{p^2(n)\}$	$2(n+1)p^2(n)$ $= (11n-7)p^2(n-1) + (7n-8)p^2(n-2) + (7n-5)p^2(n-3) - (5n-28)p^2(n-4) - (7n-41)p^2(n-5) - (7n-44)p^2(n-6)$ $- 3(n-7)p^2(n-7) - (n-8)p^2(n-8)$
$\{p^3(n)\}$	$2(n+1)p^3(n)$ $= (11n-7)p^3(n-1) + (7n-8)p^3(n-2) + 6(n-1)p^3(n-3) + 5(n+1)p^3(n-4) - (8n-55)p^3(n-5) - (11n-79)p^3(n-6)$ $- 3(4n-31)p^3(n-7) - (11n-91)p^3(n-8) - 6(n-9)p^3(n-9) - 3(n-10)p^3(n-10) - (n-11)p^3(n-11)$
$\{p_n\}$	$2(n+1)p_n = (17n-7)p_{n-1} - 4(8n-13)p_{n-2} + 4(5n-13)p_{n-3} - 2(2n-7)p_{n-4}$

【項比の極限 r と母関数の収束半径 $s=1/r$ の方程式】

$\{k^0(n)\}$	$r - 4 = 0$	$1 - 4s = 0$
$\{k^1(n)\}$	$(r + 1)(r^4 - 4r^3 - 2r^2 + 1) = 0$	$(1 + s)\{(1 + s^2)^2 - 4s(1 + s)\} = 0$
$\{k^2(n)\}$	$(r^2 + r + 1)(r^6 - 4r^5 - 2r^4 - 2r^3 + r^2 + 2r + 1) = 0$	$(1 + s + s^2)\{(1 + s^2 + s^3)^2 - 4s(1 + s + s^2)\} = 0$
$\{k^3(n)\}$	$(r^3 + r^2 + r + 1)(r^9 - 7r^8 + 10r^7 + 4r^6 + 5r^5 + 5r^4 - 3r^3 - 7r^2 - 5r - 3) = 0$	$(1 + s + s^2 + s^3)\{(1 + s^2 + s^3 + s^4)^2 - 4s(1 + s + s^2 + s^3)\} = 0$
$\{k^m(n)\}$		$(1 + s + \dots + s^m)\{(1 + s^2 + \dots + s^{m+1})^2 - 4s(1 + s + \dots + s^m)\}$ $= \frac{1 - s^{m+1}}{1 - s} \left\{ \left(\frac{1 - s^{m+2}}{1 - s} - s \right)^2 - \frac{4s(1 - s^{m+1})}{1 - s} \right\} = 0$
$\{k_n\}$	$r^4 - 6r^3 + 7r^2 - 2r + 1 = 0$	$(1 - s + s^2)^2 - 4s(1 - s) = 0$
$\{p^0(n)\}$	$r^2 - 6r + 1 = 0$	$(1 + s)^2 - 4 \cdot 2s = 0$
$\{p^1(n)\}$	$(2r + 1)(r^4 - 6r^3 - r^2 + 2r + 1) = 0$	$(2 + s)\{(1 + s + s^2)^2 - 4(2s + s^2)\} = 0$
$\{p^2(n)\}$	$2r^8 - 11r^7 - 7r^6 - 7r^5 + 5r^4 + 7r^3 + 7r^2 + 3r + 1 = 0$	$(2 + s + s^2)\{(1 + s + s^2 + s^3)^2 - 4(2s + s^2 + s^3)\} = 0$
$\{p^3(n)\}$	$2r^{11} - 11r^{10} - 7r^9 - 6r^8 - 5r^7 + 8r^6 + 11r^5 + 12r^4 + 11r^3 + 6r^2 + 3r + 1 = 0$	$(2 + s + s^2 + s^3)\{(1 + s + s^2 + s^3 + s^4)^2 - 4(2s + s^2 + s^3 + s^4)\} = 0$
$\{p^m(n)\}$		$(2 + s + s^2 + \dots + s^m)\{(1 + s + \dots + s^{m+1})^2 - 4(2s + s^2 + s^3 + \dots + s^{m+1})\}$ $= \left(2 + \frac{1 - s^{m+1}}{1 - s} \right) \left\{ \left(\frac{1 - s^{m+2}}{1 - s} \right)^2 - 4s \left(2 + \frac{1 - s^{m+2}}{1 - s} \right) \right\} = 0$
$\{p_n\}$	$(2r - 1)(r^3 - 8r^2 + 12r - 4) = 0$	$(2 - s)\{1 - 4(2s - s^2)(1 - s)\} = 0$

【数列 k^m 】

$k^m(n)$ を n 字の漢字列に対する豎点 m 個 ($0 \leq m \leq n-2$) までの使用を認めるカッコ表示の個数とし, ここでは k^m と略記する.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
C_n k^0	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796	58786
k^1	⋮	⋮	⋮	6	19	64	225	816	3031	11473	44096	171631
k^2				20	69	248	919	3485	13461	52778	209513	
k^3				70	253	942	3589	13925	54834	218598		
k^4				254	947	3612	14029	55299	220664			
k^5				948	3617	14052	55403	221129				
k^6				3618	14057	55426	221233					
k^7				14058	55431	221256						
k^8				55432	221261							
k^9				221262								
⋮				⋮								
k^{n-2}	1	1	$k^0(2)$	$k^1(3)$	$k^2(4)$	$k^3(5)$	$k^4(6)$	$k^5(7)$	$k^6(8)$	$k^7(9)$	$k^8(10)$	$k^9(11)$
k_n	1	1	2	6	20	70	254	948	3618	14058	55432	221262

一般に, ある n に対して, 次の式が成り立つ.

$$k^{n-2}(n) - k^{n-3}(n) = 1 \quad (n \geq 3)$$

$$k^{n-3}(n) - k^{n-4}(n) = 5 \quad (n \geq 4)$$

$$k^{n-4}(n) - k^{n-5}(n) = 23 \quad (n \geq 6)$$

$$k^{n-5}(n) - k^{n-6}(n) = 104 \quad (n \geq 8)$$

$$k^{n-6}(n) - k^{n-7}(n) = 465 \quad (n \geq 10)$$

【数列 p^m 】

$p^m(n)$ を n 字の漢字列に対する豎点 m 個 ($0 \leq m \leq n-2$) までの使用と、再読を認めるカッコ表示の個数とし、ここでは p^m と略記する。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
d_n p^0	1	1	3	11	45	197	903	4279	20793	103049	518859	2649723
p^1	⋮	⋮	⋮	12	52	240	1157	5759	29374	152731	806551	4314114
p^2				53	247	1201	6026	30972	162245	863096	4650128	
p^3				248	1208	6070	31240	163856	872729	4707626		
p^4				1209	6077	31284	164124	874341	4717272			
p^5				6078	31291	164168	874609	4718884				
p^6				31292	164175	874653	4719152					
p^7				164176	874660	4719196						
p^8				874661	4719203							
p^9				4719204								
⋮				⋮								
p^{n-2}	1	1	$p^0(2)$	$p^1(3)$	$p^2(4)$	$p^3(5)$	$p^4(6)$	$p^5(7)$	$p^6(8)$	$p^7(9)$	$p^8(10)$	$p^9(11)$
p_n	1	1	3	12	53	248	1209	6078	31292	164176	874661	4719204

一般に、ある n に対して、次の式が成り立つ。

$$p^{n-2}(n) - p^{n-3}(n) = 1 \quad (n \geq 3)$$

$$p^{n-3}(n) - p^{n-4}(n) = 7 \quad (n \geq 4)$$

$$p^{n-4}(n) - p^{n-5}(n) = 44 \quad (n \geq 6)$$

$$p^{n-5}(n) - p^{n-6}(n) = 268 \quad (n \geq 8)$$

$$p^{n-6}(n) - p^{n-7}(n) = 1612 \quad (n \geq 10)$$